VIELFACHSTREUUNGSMETHODEN ZUR PHOTOREALISTISCHEN VISUALISIERUNG VON SCHNEEOBERFLÄCHEN

Diplomarbeit

Technische Universität Dresden Fakultät Informatik Professur für Computergrafik und Visualisierung Prof. Dr. Stefan Gumhold

12. Juli 2011

Tom Kazimiers (Geboren am 5. Juli 1984 in Dresden)

Betreuer: Dr. Niels von Festenberg, Prof. Dr. Stefan Gumhold

AUFGABENSTELLUNG

Ziel dieser Arbeit ist es, Vielfachstreuungsmethoden zur photorealistischen Visualisierung von Schneeoberflächen zu untersuchen und umzusetzen. Es gibt bereits eine ganze Reihe von Methoden zum sog. "subsurface scattering", allerdings noch keine, die sich spezifisch mit Schneeoberflächen befassen. Daneben existieren einige Messungen aus der physikalischen Literatur zu den optischen Eigenschaften von Schneeoberflächen. In der Diplomarbeit soll eine Verbindung zwischen den computergraphischen Methoden und optischen Messungen realisiert werden.

Im Einzelnen sind dabei folgende Teilaufgaben zu lösen:

- Literaturrecherche zu "subsurface scattering"-Methoden
- Erarbeitung eines Überblicks über bisherige Messungen der optischen Eigenschaften von Schneeoberflächen
- Entwicklung einer Testumgebung zum Vergleich ausgewählter "subsurface scattering"-Methoden zur Anwendung für Schneeoberflächen, die in Form sog. "height span maps" vorliegen.
- Diskussion der Ergebnisse im Hinblick auf Besonderheiten des Schnees, die eine Erweiterung der bisherigen Techniken erfordern.

SELBSTSTÄNDIGKEITSERKLÄRUNG

Hiermit erkläre ich, dass ich die von mir am heutigen Tag dem Prüfungsausschuss der Fakultät Informatik eingereichte Arbeit zum Thema:

Vielfachstreuungsmethoden zur photorealistischen Visualisierung von Schneeoberflächen

vollkommen selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Tom Kazimiers

Dresden, den 12. Juli 2011

INHALTSVERZEICHNIS

1	EIN	LEITUN	NG 2				
	1.1 Motivation 3						
	1.2	Begrif	fe und Grundlagen 3				
		1.2.1	Kugelkoordinaten & Raumwinkel 4				
		1.2.2	Licht 4				
		1.2.3	Absorption und Streuung 7				
		1.2.4	Vielfachstreuung 8				
		1.2.5	Brechungsindex und FRESNELSche Formeln 10				
		1.2.6	Phasenfunktion 11				
		1.2.7	Die Strahlungstransportgleichung 12				
		1.2.8	Reflektanzverteilung 14				
		1.2.9	BSSRDF 16				
2	VER	WAND	TE ARBEITEN 18				
3	РНУ	23 PHYSIKALISCHE EIGENSCHAFTEN VON SCHNEE					
9	3.1	Akku	mulation 24				
	5	3.1.1	Korngröße 24				
		3.1.2	Dichte 24				
	3.2	Optiso	che Eigenschaften 26				
	0	3.2.1	Absorptions-, Streuungs- und Schwächungskoeffi-				
			zient 26				
		3.2.2	Optische Dicke 31				
		3.2.3	Phasenfunktion 32				
		3.2.4	Brechungsindex 34				
		3.2.5	Albedo 35				
		3.2.6	Weitere Eigenschaften 37				
4	MO	DELLE	38				
	4.1	Einfac	chstreuung 39				
		4.1.1	Analytische Lösung 39				
		4.1.2	MIE-Streuung 41				
	4.2	Vielfa	chstreuung 42				
		4.2.1	Zweistrom-Strahlungstransfer und δ-Eddington-Annäherung 42				
		4.2.2	Die Diffusionsapproximation 45				
		4.2.3	Isotrope Dipolannäherung 48				
		4.2.4	Multipolannäherung 52				
		4.2.5	Beschleunigte Photonenausbreitung 54				
		4.2.6	Echtzeitdiffusion mittels Splatting 56				
5	IMF	LEMEN	NTIERUNG 58				
	5.1	Szene	n & Umgebung 59				
	5.2	Allger	neine Bildberechnung 60				
		5.2.1	Höhenspannenkarten 61				
	5.3	Oberf	lächenbeschaffenheit 63				
		5.3.1	Modellierung mittels Geometrie 64				
		5.3.2	Texturierung 64				

- 5.3.3 Modellierung mittels BRDFs 65
- 5.4 Volumenstreuung 67
 - 5.4.1 Echtzeitdiffusion 67
 - 5.4.2 Multipolannäherung 69
- 5.5 Beschleunigungsverfahren 69
- 5.6 Programmoberfläche 70

75

- 6 ERGEBNISSE
 - 6.1 Testszenen 75
 - 6.1.1 Testszene 1: Lichterkette im Schnee 76
 - 6.1.2 Testszene 2: Topfpflanze 81
 - 6.1.3 Testszene 3: Schneelicht 87
 - 6.1.4 Testszene 4: Echtzeitdiffusion 91
 - 6.1.5 Testszene 5: Einfachstreuung 93
 - 6.2 Diskussion 95
- 7 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK 99

LITERATURVERZEICHNIS 110

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

Absorptionskoeffizient, m^{-1} σα Absorptionsquerschnitt, m² Cabs Albedo bzw. Rückstrahlvermögen ā Anisotropiefaktor g diffuser Reflektanzfaktor für Oberflächen-Rauheit rd diffuser Transmissionsfaktor für Oberflächen-Rauheit r_{dt} effektiver Transportkoeffizient, m^{-1} σ_{tr} effektiv halbunendliches Wasseräquivalent Wes Linearer Schwächungskoeffizient, m⁻¹ σ_t Cext Schwächungsquerschnitt, m² \vec{Q}_1 Quellterm erster Ordnung Brechungsindex n Mittlere freie Weglänge eines Photons, cm l_s optische Eindringtiefe δ Ν Teilchendichte, m^{-3} verminderter Schwächungskoeffizient σ'_t reduzierter Streuungskoeffizient σ'_s relativer Brechungsindex η Streuungskoeffizient, m⁻¹ σ_{s} Streuquerschnitt, m² C_{sca} Einfach-Streu-Albedo Λ Q Quellterm Quellterm nullter Ordnung Qo

Eine der sichtbarsten Veränderungen während des Wechsels der Jahreszeiten ist das Entstehen und Verschwinden von Schnee. Gefrorenes Wasser fällt unter vielen Einflüssen und auf unterschiedlichsten Wegen zu Boden und bedeckt diesen. Die vom Schnee und Eis bedeckten Flächen der Erde, die sog. Kryosphäre, bedeckt nicht nur im Winter größere Teile der nördlichen Hemisphäre. Auf den Kontinenten dieses Teils der Erde findet sich im Januar das Maximum der durchschnittlichen Schneemenge. Mit 45, 2 Millionen km² ist dann immerhin 57, 1% der Landmasse der nördlichen Halbkugel schneebedeckt [27].

Um dieses natürliche Phänomen computergrafisch darstellen zu können, bedarf es eines Verständnisses der Lichtausbreitung innerhalb einer Schneedecke. Es existieren bereits verschiedene Methoden, um in mancher Hinsicht vergleichbare Medien überzeugend darzustellen. Diese Arbeit verfolgt daher verschiedene Ziele:

- 1. Die optischen Eigenschaften von Schnee sowie der Einfluss verschiedener physikalischer Parameter sollen ermittelt und untersucht werden.
- Volumenstreuung (engl. subsurface scattering) bestimmt das Strahlungsfeld innerhalb einer Schneedecke. Dabei macht die Volumenstreuung (engl. multiple scattering) den weit größten Teil aus. Verschiedene Berechnungsmethoden werden verglichen und zum Teil implementiert.
- 3. Zuletzt soll es das Ziel sein, pysikalisch plausible Visualisierungen von Schneedecken zu erzeugen. Die hier betrachtete Strahlung ist daher der sichtbare Bereich des elektromagnetischen Spectrums.

Dass die Lichtausbreitung in Schneeoberflächen durch Vielfachstreuung dominiert wird, liegt in der großen Anzahl optischer Grenzflächen innerhalb des Gemisches von Luft, Wasser, Eis und Einschlüssen begründet. Sehr viele Streuvorgänge sind die Folge. Dazu kommt, dass diese Streuung vornehmlich nach vorne gerichtet ist; vor allem im sichtbaren Bereich legen die Photonen große Strecken in einer Schneedecke zurück. Dieselbe Ursache in Bezug auf entsprechend andere Komponenten hat die Vielfachstreuung innerhalb der Haut und anderer Medien. Im Vergleich zu Schnee oder blasenhaltigem Eis, ist Vielfachstreuung bei reinem Eis kaum vorhanden. Insofern ist Schnee in vieler Hinsicht Wolken ähnlicher. Allein, die Eisteilchen in Schnee sind deutlich näher bei einander als es Wassertröpfchen in einer Wolke sind [10] und auch die Eisteilchen selbst bewegen sich in ganz anderen Größenordnungen sie sind deutlich Größer.

1.1 MOTIVATION

Schnee hat ein sehr hohes Albedo. Ein großer Teil des auftreffenden Lichts wird entweder direkt reflektiert oder durch Streuvorgänge wieder von der Schneemasse weg transportiert. Diese Eigenschaft macht eine Betrachtung der Vielfachstreuung unumgänglich [11]. Einfachstreuung ist zur Beschreibung vieler bekannter Erscheinungen nicht ausreichend. Das Weiß eines Glas Milch, die Helligkeitsänderungen von Wolken oder der bläuliche Schein von durch Schnee gewandertem Licht lässt sich nur unter Berücksichtigung mehrfacher Streuvorgänge erklären.

Nur auf den ersten Blick stellt sich die Schneeoberfläche als (fast) einheitliches Weiß dar. Löcher und Vertiefungen sind nicht selten von einem tiefen Blau geprägt. Auch haben Gletscherspalten diese Farbgebung im Inneren. Manchmal kann man im bläschenreichen Eis gefrorener Wasserfälle einen blau-grünen Schimmer finden. Diese und ähnliche Beispiele werden z.B. von Bohren genannt [10] und deuten eine Vielfalt in Blautönen an. Diese basiert auf der bevorzugten Absorption von rotem Licht. Außerdem bringt die weniger wellenlängenabhängige Vielfachstreuung eine hohe Eindringtiefe des Lichts mit sich.

Ein in der Computergrafik häufig eingesetztes Modell, die in Abschnitt 4.2 beschriebene Dipolannäherung von Jensen [45], baut auf Methoden der sog. Diffusionsapproximation auf. Diese wierderum kam schon in verschiedenen Kontexten der Schneemessung und -berechnung zum Einsatz. So beschrieben beispielsweise Bohren und Barkstrom [12] das Strahlungsfeld in geschlossenen Schneeobjekten mittels der Diffusionsapproximation. Schnee ein stark (vorwärts-) streuendes Medium. Optische Eigenschaften wie diese führen interessanterweise sonst gerade *nicht* zur Empfehlung des Dipolmodells [29]. Daher Scheint eine genauere Untersuchung zur Verwendbarkeit dieser Methode im Bezug auf die Visalisierung von Schneedecken interessant und zielführend.

1.2 BEGRIFFE UND GRUNDLAGEN

Modelle für die Vielfachstreuung bauen ihrerseits auf verschiedenen anderen Konzepten auf. Inzwischen gibt es auch verschiedene Ansätze aus der Computergrafik selbst heraus. Deren Ziel muss aber nicht immer eine physikalisch basierte Berechnung sein. Einige der Modelle zur Beschreibung der Lichtausbreitung in einem Material haben wir der Klimatologie und der Medizin zu verdanken. Der Energiehaushalt der Erde bestimmt maßgeblich das Klima und die Informationen über die Lichtausbreitung in Zellen lassen Rückschlüsse auf ihren Gesundheitszustand zu [3]. Diese Herausforderungen wurden mit der Strahlungstransportgleichung und der Diffusionsapproximation angegangen. Das theoretische Grundgerüst der Vielfachstreuung entstammt der Meteorologie. Die Computergrafik baut auf diesen Ansätzen auf und entwickelt Modelle zur Darstellung sowie zum Vergleich mit alternativen Modellen. So wird in diesem Kapitel ein Überblick über verwendete Konzepte und Techniken geboten.

1.2.1 Kugelkoordinaten & Raumwinkel

In dieser Arbeit wird häufig die dimensionslose Größe des Raumwinkels Ω verwendet. Sie berechnet sich aus einer Teilfläche S und dem Radius r: $\Omega = \frac{S}{r^2}$. Zur Verdeutlichung besitzt der Raumwinkel aber die Einheit sr (Steradiant). Mit seiner Hilfe lässt sich für Kugeln darstellen, was für einen ebenen Kreis Winkel sind. Entscheidend ist nicht die Form der Teilfläche auf der Kugeloberfläche, sondern deren Flächeninhalt. Somit ist der volle Raumwinkel unabhängig vom Radius: $\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$ sr.

Kugelkoordinaten beschreiben eine Position auf einer Kugel durch zwei Winkel φ und θ . Innerhalb dieses Koordinatensystems wird ein Flächensegment durch je zwei Winkel φ_1, φ_2 und θ_1, θ_2 dargestellt. In Abb. 1 wird der Zusammenhang gezeigt.



Abbildung 1: Raumwinkel einer Kugel. Bei einem Einheitskreis entspricht der volle Raumwinkel der Oberfläche: 4π .

1.2.2 Licht

Licht ist eine elektromagnetische Welle mit Teilcheneigenschaften. Beide Betrachtungen werden benötigt um die Eigenschaften von Licht zu erklären. Es bestimmt dabei in hohem Grade wie wir Objekte wahrnehmen, in Farbe und Gestalt. Betrachtet man Licht als Welle, lässt es sich als eine (unendliche) Menge von Sinusschwingungen darstellen. Diese haben unterschiedliche Wellenlängen und unterschiedliche Richtungen. Besteht das betrachtete Licht nur aus Wellen gleicher Wellenlänge und gleicher Richtung, spricht man von *kohärentem* Licht. Sonnenlicht, das aus einer Menge einzelnen Wellen unterschiedlicher Wellenlänge besteht, ist somit *inkohärent*. Zumal es zusätzlich überall gestreut wird. Als Bereich der elektromagnetischen Strahlung kann Licht außerdem absorbiert (umgewandelt), unbeeinflusst transmittiert, gestreut oder reflektiert werden, sofern es auf ein Hindernis trifft.

Wie bei anderen Wellen lässt sich Licht in seine *Elementarwellen* zerlegen. Analytisch kann dies mittels der Fourier-Transformation beschreiben. Dabei wird ein Frequenzspektrum erstellt und es können Aussagen über die Energie der einzelnen Elementarwellen getroffen werden.

Jede elektromagnetische Welle transportiert Energie, so auch Licht. Diese *Strahlungsenergie* Q_e trägt die Einheit Ws bzw. Joule (J) und ist lediglich von der Frequenz f abhängig. Der Index *e* zeigt an, dass es sich um eine "energetische" bzw. strahlungsphysikalische Größe handelt. Alternativ wäre eine photometrische Betrachtung möglich, jedoch sind dann die Größen mit der menschlichen Sinneswahrnehmung gewichtet. Im weiteren Verlauf wird aus Gründen der Leserlichkeit auf diesen Index verzichtet. Ist h das Plancksche Wirkungsquantum, errechnet sich die Energie eines einzelnen Photonen nach Q = hv. Die Strahlungsenergie für eine bestimmte Lichtfrequenz bestimmt sich nun aus der Anzahl von Photonen multipliziert mit der Einzelenergie eines einzelnen Photons.

Im Falle von Licht wird statt der Frequenz ν oft die Wellenlänge λ angegeben. Ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium¹, so gilt: $\nu = \frac{c}{\lambda}$.

1.2.2.1 Strahlungsfluss

Der Strahlungsfluss (engl. flux) ist eine Größe dQ, die die Energie beschreibt, die pro Zeiteinheit von einer elektromagnetischen Welle transportiert wird:

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Bezieht man sich mit seinen Aussagen auf die Empfindlichkeit der menschlichen Augen, wird auch der photometrische Begriff *Lichtstrom* verwendet.

1.2.2.2 Strahlungsstärke

Der Anteil des gesamten Strahlungsflusses Φ_e durch ein Raumwinkelelement wird durch die Strahlungsstärke I (auch Strahlungsintensität, engl. radiant intensity) ausgedrückt.

$$I = \frac{d\Phi_e}{d\omega}$$

Ihre Einheit ist demzufolge $W \cdot sr^{-1}$. Die nachfolgend erklärte Strahldichte wird in manchen anderen Feldern ebenfalls Intensität genannt, bezeichnet da aber nicht dasselbe wie die Strahlungsstärke.

1.2.2.3 Strahldichte

Mit der Strahldichte (auch spezifische Intensität, engl. radiance) L wird beschrieben, welche Strahlung von einer Sendefläche ausgeht. Sie ist die wichtigste Strahlungsgröße in der Computergrafik und globale Beleuchtung, sie stellt schließlich die Energie jeder Wellenlänge im reflektiertem

¹ c von Licht im Vakuum (c₀): 299.792, 458km/s \approx 300.000km/s = 300.000.000m/s

Licht dar. In der Nachrichtentechnik ist sie der physikalische Träger derjenigen Information, welche beispielsweise unsere Augen wahrnehmen. Die räumliche und/oder zeitliche Veränderung der Leuchtdichte codiert diese Information. Sie ist eine Beschreibung des Energietransports mit der Einheit Wm⁻²sr⁻¹ und drückt aus, wie viel Licht pro Zeit aus einer Richtung auf einer kleinen Fläche auftrifft. Anders ausgedrückt beschreibt sie auch die Lichtintensität an einem Punkt im Raum in eine bestimmte Richtung.

Betrachtet man den Strahlungsfluss auf sein Ortsverhalten, erhält man eine Größe, die sich als "Ortsdichte" beschreiben lässt. Diese wird oftmals in die *spezifische Ausstrahlung* M (engl. radiant exitance) und die *Bestrahlungsstärke* E (engl. irradiance) unterteilt—in die Ortsdichte abgehender und ankommender Strahlung. In Bezug auf die Computergrafik ist vor allem letztere von Bedeutung:

$$E(x) = \frac{d\Phi_e}{dA} = \int_{4\pi} L(x, \vec{\omega}) d\omega$$
(1.1)

Zuweilen ist eine Unterscheidung zwischen der skalaren Bestrahlungsdichte E_0 und der vektoriellen Bestrahlungsdichte \vec{E} (auch Strahlungsflussvektor) hilfreich. Die skalare Bestrahlungsstärke ist richtungsunabhängig und ist bereits durch Gleichung (1.1) definiert. Alles einfallende Licht wird aufsummiert. Hingegen stellt \vec{E} die Nettobestrahlungsstärke und die *Richtung* des Gesamtenergieflusses am Punkt x dar. Im Gegensatz zu E_0 werden die Richtungen, in die das einfallende Licht fließt, berücksichtigt. Für jedes Raumelement d ω wird ein Vektor $\hat{\omega}$ konstruiert. Dieser hat die Richtung des einfallenden Lichts auf x und eine Länge gleich 1. Dieser wird mit der Strahldichte bei x in Richtung $\hat{\omega}$ [2] multipliziert und anschließend über die umgebende Kugel integriert:

$$\vec{\mathsf{E}}(\mathsf{x}) = \int_{4\pi} \mathsf{L}(\mathsf{x}, \vec{\omega}) \hat{\omega} \, \mathrm{d}\omega \tag{1.2}$$

Analog zu E ist die *Strahlungsintensität* I der Elementarstrahlungsfluss pro Elementarraumwinkel: $I(\vec{\omega}) = \frac{d\Phi_e}{d\omega}$. Fasst man diese Raumwinkeldichte und die Ortsdichte zusammen, ergibt das die Strahldichte. Dabei gilt es zu beachten, dass die Strahldichte auf das in Abstrahlrichtung projizierte Flächenelement $\cos \theta \cdot dA$ bezieht. Dies geht zum einen auf möglicherweise richtungsabhängige Oberflächeneigenschaften zurück. Zum anderen entspricht es der rein geometrisch wirksamen Fläche einer in eine bestimmten Richtung abgegebenen Strahlung. Denn je größer der Winkel θ zwischen der Strahlungsrichtung und der Normalen der bestrahlten Fläche ist, desto weniger Photonen treffen auf diese. Um dies zu berücksichtigen wird die (hier infinitesimal kleine) Fläche ihrem Winkel entsprechend skaliert. Damit ist die Strahldichte allein eine Eigenschaft des Strahlungsfeldes² und nicht abhängig von der Orientierung der Fläche A.

$$L(x,\vec{\omega}) = \frac{d^2 \Phi_e}{\cos \theta \, dA \, d\omega} = \frac{dI}{dA}$$

Sofern das Feld der Strahldichten bekannt ist, kann der Strahlungsfluss errechnet werden. Durch Integration über alle Richtungen in der Hemisphäre und alle Oberflächenpunkte sowie dem Zusammenhang $\cos \theta = \hat{w}_i \cdot \vec{n}$, ergibt sich

$$\Phi_{e} = \int_{A} \int_{2\pi} L_{i}(x_{i}, \hat{\omega}_{i})(\hat{\omega}_{i} \cdot \vec{n}) d\hat{\omega}_{i} dx_{i}.$$
(1)

Dabei stellt \vec{n} die Oberflächennormale an Stelle x_i dar.

Bewegt sich ein infinitesimales Lichtbündel durch ein homogenes Medium, so nimmt die einfallende Strahldichte exponentiell mit der Entfernung s ab. Die verringerte Strahldichte L_{ri} (engl. reduced intensity) beschreibt dies:

$$L_{ri}(x_i + s\hat{\omega}_i, \hat{\omega}_i) = e^{-\sigma_t s} L_i(x_i, \hat{\omega}_i).$$

1.2.3 Absorption und Streuung

Während sich ein Strahlenbündel durch ein Medium bewegt kann es zu Absorption und Streuung kommen. Beide Wechselwirkungen schwächen den Strahlungsfluss Φ in die ursprüngliche Richtung. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Abschwächung geschieht, wird durch den Schwächungsquerschnitt C_{ext} (engl. extinction cross section) beschrieben. Dieser besteht aus zwei Komponenten, dem Absorptionsquerschnitt C_{abs} (engl. absorption cross-section) und dem Streuungsquerschnitt C_{sca} (engl. scattering cross-section), beide sind ebenfalls spektrale Größen. Es gilt: $C_{ext} = C_{abs} + C_{sca}$.

Der Begriff des Wirkungsquerschnitts, der C_{ext}, C_{abs} und C_{sca} zu Grunde liegt, darf nicht mit dem geometrischen Querschnitt verwechselt werden. Hat letzterer eine geometrische Grundlage, so ist ersterer lediglich ein Proportionalitätsfaktor. Folgende Erläuterung von Bohren und Clothiaux [14] soll das verdeutlichen: Betrachtet man ein Teilchen isoliert und lässt einen unidirektionales monochromatisches Lichtbündel darauf "scheinen", wird das Teilchen einen Teil davon absorbieren. Dies geschieht mit der zur Bestrahlungsstärke E proportionalen Rate W_a . Durch die Bestrahlungsstärke wird die Ortsabhängigkeit des Strahlungsflusses beschrieben (siehe Abschnitt 1.2.2.3). Damit hat sie die Einheit Energie pro Einheitsfläche und W_a drückt eine Energie aus. In diesem Zusammenhang tritt C_{abs} als der passende Vermittler auf und es ist ersichtlich, warum C_{abs} eine Flächeneinheit hat:

$$W_a = C_{abs}E$$

² Nicht zu verwechseln mit dem zugrundeligendem elektromagnetischen Feld!

Die Wirkungsquerschnitte hängen über die Teilchendichte N mit dem linearen *Schwächungskoeffizient* σ_t^3 , dem *Absorptionskoeffizienten* σ_a und dem *Streuungskoeffizienten* σ_s zusammen:

$$\sigma_t = NC_{ext}, \quad \sigma_a = NC_{abs}, \quad \sigma_s = NC_{sca}, \quad \sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$$

Je größer C_{ext} bzw. σ_t sind, desto weniger durchlässig ist das Material und desto mehr Streuvorgäng geschehen. Entlang eines Wegelements ändert sich der Strahlungsfluss nach $d\Phi_{e,\lambda}(s) = -\sigma_t(\lambda)\Phi_{e,\lambda}(s) ds$. Durch Integration folgt daraus das LAMBERT-BEERSche Gesetz:

$$\Phi_{e,\lambda}(s) = \Phi_{e,\lambda}(0) \cdot e^{-\sigma_{t}(\lambda)s}.$$
(1.3)

Es besagt, dass der Strahlungsfluss exponentiell mit dem Weg abnimmt. Da es sich bei σ_t um eine spektrale Größe handelt, gilt der Zusammenhang nur für monochromatisches Licht. Photonen, die durch mehrere Streuvorgänge (Vielfachstreuung) in die Betrachtungsrichtung eingestreut werden, können durch dieses Gesetz nicht berücksichtigt werden. Es gilt somit nur, wenn die Vielfachstreuung vernachlässigbar ist oder nicht existiert. Bei Schnee ist dies aber nicht der Fall.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon bei einer Wechselwirkung gestreut statt absorbiert wird, ist als Einfachstreu-Albedo Λ (engl. single scattering albedo) beschrieben. Sie entspricht dem Quotienten aus Streuungs- und Schwächungsquerschnitt:

$$\Lambda = \frac{C_{sca}}{C_{ext}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_t}, \quad 1 - \Lambda = \frac{C_{abs}}{C_{ext}}$$

Auch lässt sich die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Wechselwirkungen mit Hilfe des Schwächungskoeffizienten beschreiben:

$$l_s = \frac{1}{\sigma_t}$$

Geht man von einem kugelförmigen Teilchen aus und ist dessen Durchmesser ausreichend groß gegenüber der Wellenlänge das auftreffenden Lichts, kann C_{abs} mittels der geometrischen Optik beschrieben werden [10]. In Abschnitt 3.2.1 werden darauf aufbauend Annäherungen für die Wechselwirkungsquerschnitte von Schnee dargestellt.

1.2.4 Vielfachstreuung

Bei der Streuung handelt es sich um einen Vorgang in dem ein Objekt durch ein anderes Objekt in unmittelbarer Nähe—das Streuzentrum abgelenkt wird. Licht kann an Atomen abgelenkt werden. Je nachdem wie oft ein Lichtstrahl abgelenkt wird, spricht man von *Einfachstreuung*

³ Es scheint verschiedene Einheitenkonventionen zu geben. Van de Hulst [81] benutzt für die Koeffizienten γ statt σ. In manch anderen Veröffentlichungen wird alternativ auch μ geschrieben, σ steht dann häufig für den Wirkungsquerschnitt (hier C).



Abbildung 2: Einfachstreuung, nach [45]

oder Vielfachstreuung (auch Mehrfachstreuung). In Abbildung 2 ist erstere dargestellt. Diese Unterscheidung spiegelt sich in den Ablenkungswinkeln beim Austritt aus einem Material wider: Große Ablenkungswinkel kommen sehr selten vor, und man kann davon ausgehen, dass diese i. Allg. von einfach gestreutem Licht herrühren [40]. Einfachstreuung ist also jenes Licht, das in das Material eindringt, an einem Partikel gestreut wird und geradewegs wieder aus der Oberfläche austritt. Vielfachstreuung hingegen ist das Licht, welches in ein Material eindringt und erst nach mehrfachen (oft sehr vielen) unabhängigen Einfachstreuungsvorgängen wieder austritt. Sie spielt im täglichen Leben auch eine größere Rolle, wir nehmen unsere Umgebung nahezu ausschließlich über mehrfach gestreutes Licht war. Typischerweise werden beide Komponenten, Einfach- und Vielfachstreuung, in einem Streuungsmodell berücksichtigt. Ein weiterer Grund zu dieser Art der Betrachtung ist analytischer Natur. Bei einem Einfachstreuereignis lässt sich problemlos über das eintreffende Licht integrieren, da dieses nur aus (der möglicherweise gebrochenen) Richtung zur Lichtguelle kommen kann. Auch kann die Entfernung zwischen Eintritts- und Austrittspunkt aus dem Medium nicht sehr groß sein und verschiedene Winkel sind vernachlässigbar. Eine analytische Lösung zur Einfachstreuung ist somit möglich.

Es existieren verschiedene Modelle zur Beschreibung von Streuung. Ein allgemeines Instrument stellt die in Abshnitt 1.2.7 beschriebene Strahlungstransportgleichung dar. Sie stellt die Verbindung zwischen der reflektierten und remittierten Strahlung der Schneeoberfläche und ihr innewohnender Eigenschaften wie Dichte, Kristallcharakteristika und der Temperatur her. Aber auch speziellere Lösungen existieren für bestimmte Verhältnisse von Teilchendurchmesser d zur Wellenlänge λ des Lichts.

Ist d kleiner λ , beschreibt die *Rayleigh-Streuung* das Verhalten. Dies ist beispielsweise bei dem Auftreffen von Licht auf Moleküle der Fall und sie ist daher der Grund für die Färbung des Himmels. In der Atmosphäre kommen viele und vor allem kleinere Moleküle vor [63]. Kleinere Wellenlängen werden bei der Rayleigh-Streuung stärker gestreut. Daher legt blaues Licht in der Atmosphäre einen längeren Weg zurück und kommt aus sehr vielen verschiedenen Richtungen auf die Erde—ein blauer Himmel entsteht um die direkte Einstrahlrichtung der Sonnen herum. Am Morgen und Abend sehen wir aber Licht, das länger durch die Atmosphäre wanderte. Das hat zur Folge, dass der größte Anteil von blauem und grünem Licht bereits seitwärts weggestreut wurde ehe es unser Auge erreicht—gelbe, orange und rote Farben dominieren.

Die Streuung an Teilchen, deren Größe etwa der Wellenlänge entspricht ($d \approx \lambda$), wird durch die LORENZ-MIE-Streuung mathematisch beschrieben. Diese größeren Bestandteile der Luft werden Aerosole genannt. Staub und Luftverschmutzung sind Beispiele dafür. Für sphärische Partikel ergibt sich nach Mie eine ähnliche Streuung aller Wellenlängen. Dies lässt sich beispielsweise an einem trüben Tag anhand des eher grauen Himmels und einem hellen Schein um die Sonne feststellen. Auch die Streuung an Wasser- und Eisteilchen kann man mittels LORENZ-MIE-Streuung berechnen. Somit ist auch der Regenbogen durch sie zu erklären.

Für Teilchen, die groß gegenüber der Wellenlänge sind, kann die geometrische Optik bemüht werden. Durch sie ist es ebenfalls möglich, den Schwächungsquerschnitt anzunähern. Ist $C_{abs} \ll G$, entspricht C_{ext} eines Teilchens mit dem Radius r im Allgemeinen dem Zweifachen des geometrischen Querschnitts G: $C_{ext} = 2G = 2\pi r^2$. Bohren und Barkstrom [12] merken dazu an, dass davon der Beugungsquerschnitt, der G entspricht, abgezogen werden kann, wenn die Beugung nicht berücksichtigt wird. Das ist in dieser Arbeit der Fall und so beschreibt die geometrische Optik C_{ext} wie folgt:

$$C_{ext} = G = \pi r^2 \tag{1.4}$$

1.2.5 Brechungsindex und FRESNELsche Formeln

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht ist abhängig vom umgebenden Medium. Um wie viel langsamer als im Vakuum sich Licht in einem bestimmten Material ausbreitet, gibt der Brechungsindex n an: $n = \frac{c_0}{c}$. Dieser ist dimensionslos und kann sich bei einem Material zwischen verschiedenen Wellenlängen unterscheiden. Oftmals wird aber eine Mittlung über alle Wellenlängen angegeben. Durch diesen als Dispersion bezeichneten Effekt ist es beispielsweise möglich, ein Farbspektrum mit einem Prisma zu erzeugen. Sollen ebenfalls weitere Effekte wie die Absorption berücksichtigt werden, ist es möglich, den Brechungsindex als komplexe Zahl anzugeben: $\tilde{n}(\omega) = n(\omega) + ik$, mit $\sigma_t(\lambda) = \frac{2\omega k}{c_0} = \frac{4\pi v k}{c_0} = \frac{4\pi k}{\lambda}$. Der Extinktionskoeffizient k beschreibt ebenfalls die Schwächung durch Absorption und Streuung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium wird durch den realen Anteil $n(\omega)$ repräsentiert. Gemittelt hat Eis einen Brechungsindex von 1,32 und in Abschnitt 3.2 wird weiter auf die Dispersion bei Eis und Schnee eingegangen.

Oftmals wird im Bezug auf den realen Brechungsindex mit dem relativen Brechungsindex $\eta = \frac{n_2}{n_1}$ gearbeitet. Dieser hat den Vorteil, dass er unabhängig von den konkreten Brechungsindizes der beteiligten Materialien ist und man statt eines Bruches diesen als verkürzte Schreibweise verwenden kann. Beispielsweise haben $n_1 = 1.5$ und $n_2 = 3$ sowie $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ denselben relativen Brechungsindex von $\eta = 2$. Über die FRESNELSchen Formeln lässt sich der vom Einfallswinkel und dem Brechungsindex abhängige Reflexionsgrad F_r an einer Grenzfläche errechnen. Wie groß diese ist, hängt zusätzlich auch von der Polarisation des Lichts ab. Entsprechend existieren Berechnungsvorschriften für parallel oder senkrecht polarisierte sowie unpolarisierte Strahlung:

$$F_{r}^{\parallel}(\theta_{i}) = \left(\frac{n_{1}\cos\theta_{t} - n_{2}\cos\theta_{i}}{n_{1}\cos\theta_{t} + n_{2}\cos\theta_{i}}\right)^{2}$$
$$F_{r}^{\perp}(\theta_{i}) = \left(\frac{n_{1}\cos\theta_{i} - n_{2}\cos\theta_{t}}{n_{1}\cos\theta_{i} + n_{2}\cos\theta_{t}}\right)^{2}$$
$$F_{r}(\theta_{i}) = \frac{1}{2}[F_{r}^{\parallel}(\theta_{i}) + F_{r}^{\perp}(\theta_{i})]$$

Die Polarisation wird hier aber nur insofern berücksichtigt, als dass von unpolarisiertem Licht ausgegangen wird. Licht, welches nicht reflektiert wird, gelangt in das Medium hinein und wird dort gestreut oder absorbiert. Der Transmissiosgrad F_t ergibt sich aus $F_t = 1 - F_r$.

Ist die F_r gegeben und wird über alle Einfallswinkel $\hat{\omega}'$ integriert, erhält man den diffusen FRESNELSchen Reflexionsgrad F_{dr} :

$$F_{dr} = \int_{2\pi} F_r(\eta, \hat{n} \cdot \hat{\omega}')(\hat{n} \cdot \hat{\omega}') d\omega'.$$
(1.5)

η stellt den relativen Brechungsindex des Mediums mit dem Lichtbündel zum angrenzenden Medium dar. F_{dr} ließe sich analytisch berechnen, der Einfachheit halber wird vor allem aber in der Computergrafik häufig eine Annäherung verwendet [22]:

$$F_{dr} \simeq \begin{cases} -0.4399 + \frac{0.7099}{\eta} - \frac{0.3319}{\eta^2} + \frac{0.0636}{\eta^3}, & \eta < 1\\ -\frac{1.4399}{\eta^2} + \frac{0.7099}{\eta} + 0.6681 + 0.0636\eta, & \eta > 1 \end{cases}$$
(1.6)

1.2.6 Phasenfunktion

In der Optik beschreibt eine Phasenfunktion $p(\vec{\omega}, \vec{\omega}')$ die Winkelverteilung der gestreuten Strahlung. Anders ausgedrückt, lässt es sich damit darstellen, ob ein Medium isotrop oder anisotrop ist. Im Falle einer anisotropen Streuung stellt die Phasenfunktion auch die Charakteristik dar. Sie ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die neue Richtung eines Photons nach einem Streuereignis pro Einheitsraumwinkel. Im lokalen Kugelkoordinatensystem (ϑ, φ) dieser Wechselwirkung soll (die *z*-Achse) hier die Richtung $\vec{\omega}$ darstellen, in die sich das Photon vorher bewegte. Dabei stellt ϑ den Streuwinkel und φ den Azimutwinkel dar. Die Streurichtung ist als $\vec{\omega}'$ gekennzeichnet. Nach Bohren und Clothiaux [14] kommt es häufiger vor, dass Streuereignisse symmetrisch bzgl. dem Azimut und damit unabhängig von φ sind. Damit sind alle Azimutwinkel gleich wahrscheinlich und die Phasenfunktion kann auch $p(\vartheta, \varphi) = \frac{p(\vartheta)}{2\pi}$ geschrieben werden. In diesem Zusammenhang stellt $\frac{1}{2\pi}$ die gleichverteilte Wahrscheinlichkeit für alle Azimutwinkel dar. In den weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, dass die Phasenfunktion normalisiert ist, d.h.

$$\int_{4\pi} p(\vec{\omega}, \vec{\omega}') d\omega' = 1 \quad \text{bzw.} \quad \int_{-1}^{1} p(\mu) d\mu = 1.$$

Damit dies gelten kann, wird eine zufällige Verteilung der Teilchen vorausgesetzt [78]. Es existiert also keine Korrelation zwischen den einzelnen Streukörpern. Der zweite Ausdruck stellt für $\mu = \cos \varphi$ den Fall dar, dass keine Azimutabhängigkeit besteht.

Mittels zirkularer Statistik lässt sich der Mittelwert g der Cosinuswerte aller Streuwinkel berechnen. Das ist der *Anisotropiefaktor* g. Ist er positiv, ist die Phasenfunktion hauptsächlich vorwärtsstreuend; eine totale Vorwärtsstreuung tritt bei g = 1 auf (MIE-Streuung an großen Teilchen). Ist g hingegen negativ, tritt vorwiegend Rückwärtsstreuung auf. Isotrope Streuung wird durch g = 0 dargestellt (RAYLEIGH-Streuung). Die Phasenfunktion wird hier zur streuwinkelabhängigen Berechnung der Lichtintensität innerhalb eines streuenden Mediums genutzt. Sie soll hier nur von diesem abhängig sein und es gilt $p(\hat{\omega} \cdot \hat{\omega}') = p(\hat{\omega}, \hat{\omega}') =$ $p(\mu)$.

$$g \equiv \langle \cos \vartheta \rangle = \int_{4\pi} (\hat{\omega} \cdot \hat{\omega}') p(\vec{\omega}, \vec{\omega}') d\omega' = \int_{-1}^{1} \mu p(\mu) d\mu$$
(1.7)

Eine häufig genutzte [78] analytische Annäherung der Phasenfunktion ist die HENYEY-GREENSTEIN-Funktion:

$$p(\mu) = \frac{1}{2} \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g\mu)^{1.5}}$$
(1.8)

Sie hat keinen physikalischen Hintergrund, aber den Vorteil, dass sie lediglich vom Anisotropiefaktor g und dem Streuwinkel ϑ zwischen einfallender und ausgehender Richtung abhängt. Damit ist sie sehr intuitiv zu parametrisieren und wird entsprechend häufig verwendet [82]. Sie ist normalisiert (daher die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$) und findet auch bei Streuungsproblemen in der Computergrafik häufig Anwendung.

1.2.7 Die Strahlungstransportgleichung

In partizipierenden Medien wird der Strahlungsstransport durch die Strahlungstransportgleichung (engl. radiative transport equation bzw. volume rendering equation) beschrieben [16]. Ihre ursprüngliche Aufgabe war die Beschreibung von Neutronen in Festkörpern, Ludwig Boltzmann stellte sie zwischen 1872 und 1875 auf. Die Strahlungstransportgleichung ist eine Bilanzgleichung für die Strahlung, die ein Volumenelement dV an Ort \vec{x} in Richtung $\vec{\omega}$, zusammengefasst als Wegelement ds, durchfließt. Die Änderung einer Größe entlang eines Wegelements (die Ableitung nach diesem) kann auch geschrieben werden als $\frac{d}{ds} = \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}$ [30]. Die Strahlungstransportgleichung beschreibt die Änderung der Strahlungsdichte pro einem solchen Wegelement. Sie setzt sich aus drei verschiedenen Beiträgen zusammen: 1. Abschwächung 2. Streuung und 3. Quelle. Diese werden nachfolgend erläutert.

1. *Abschwächung* - die Strahldichtenänderung, die durch Absorption und Streuung im Wegelement ds verloren geht.

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) L(x, \vec{\omega}) &= -\sigma_{a}(\vec{x}) \cdot L(x, \vec{\omega}) - \sigma_{s}(\vec{x}) \cdot L(x, \vec{\omega}) \\ &= -\sigma_{t}(\vec{x}) \cdot L(x, \vec{\omega}) \end{aligned}$$

Dabei stellen σ_a den Absorptionskoeffizienten, σ_s den Streuungskoeffizienten und $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$ den Schwächungskoeffizienten dar.

2. *Streuung* - einfallendes gestreutes Licht wirkt positiv auf die Strahldichte, es kommt Energie hinzu.

$$(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})L(x,\vec{\omega}) = \sigma_{s}(\vec{x})\cdot\int_{4\pi} p(\vec{\omega},\vec{\omega}')L(x,\vec{\omega}')\,d\omega'$$

Die einfallende Strahlstärke wird über alle Richtungen der umgebenden Kugel integriert. Die Phasenfunktion p beschreibt die Charakteristik der Strahlungsverteilung.

3. *Quelle* - die Änderung der Strahldichte in Richtung \vec{w} aufgrund einer Lichtquelle im Volumenelelement pro Raumwinkelelement pro Zeit. Damit wird beschrieben, ob und wie ein Partikel Licht emittiert.

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) L(x, \vec{\omega}) = Q(x, \hat{\omega}) = \sigma_a L_e(x, \hat{\omega})$$

Kombiniert man die eben genannten Beiträge zur Strahldichtenänderung erhält man

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) L(x, \vec{\omega}) = -\sigma_{t} L(x, \vec{\omega}) + \sigma_{s} \int_{4\pi} p(\vec{\omega}, \vec{\omega}') L(x, \vec{\omega}') d\omega' + \sigma_{a} L_{e}(x, \hat{\omega}).$$
(1.9)

Diese Differentialgleichung stellt den Zusammenhang zwischen der Strahldichte L, den Streu- und Absorptionskoeffizienten σ_s bzw. σ_a sowie der Emission dar. Letztere wird als Lichtquelle Q dargestellt. Die linke Seite der Gleichung beschreibt die Änderung der Strahldichte an einem Punkt x entlang der Richtung $\vec{\omega}$. Welche Effekte diese Änderung bewirken, wird durch die rechte Seite beschrieben. Die wesentliche Aussage ist, dass Licht bei seinem Weg Energie durch Absorption und Streuung verliert und durch Emission sowie durch einfallende Streuung gewinnt.

Aus physikalischer Sicht lässt sich die Vielfachstreuung nur sehr schwer beschreiben, sie stellt ein komplexes statistisches Problem dar. Müsste man doch eigentlich Position, Form, Größe, Orientierung, Brechungsindex, etc. von jedem streuenden Partikel kennen, um detaillierte Aussagen treffen zu können. Analytische Lösungen für die Strahlungstransportgleichung existieren nur für relativ einfache Probleme. Sogar numerische Lösungen kommen durch die Vielzahl unabhängiger Variablen an ihre Grenzen. So benötigt eine *Monte-Carlo-Simulation* sehr viel Zeit, um gute Ergebnisse zu liefern. Unter Zuhilfenahme eines Zufallsgenerators und der Annahme bestimmter Wahrscheinlichkeiten für Streuung, Absorption und dem Verhalten an Grenzschichten werden mögliche Wege einzelner Photonen simuliert [71]. Für die Wechselwirkungsquerschnitte ergeben sich diese entsprechend dem LAMBERT-BEERschen Gesetz (1.3). Ob einem Photon der Übergang von einem Medium in ein anderes möglich ist, errechnet sich über die FRESNELschen Formeln. Das SNELLIUS-Gesetz der Lichtbrechung legt anschließend die Richtung der weiteren Ausbreitung fest. Für eine analytische Lösung benötigte man außerdem noch ein besseres Verständnis der physikalischen Zusammenhänge. Daher müssen Annäherungen gesucht und gefunden werden, um brauchbare Ergebnisse zu bekommen. Um die Annäherung jedoch beurteilen zu können, ist eine Monte-Carlo-Simulation oftmals das Mittel der Wahl.

Bei hinreichender Anzahl von Streuereignissen kann man die Ausbreitung des Lichts jedoch auch als diffusen Prozess verstehen. Mittels einer Diffusionsapproximation, welche die Wellennatur des Lichts vernachlässigt, kann man diesen für optisch dichte Medien berechnen [26]. In Abschnitt 4.2.2 wird darauf näher eingegangen.

Integriert man Gleichung (1.9) über alle Richtungen $\hat{\omega}$ erhält man

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathsf{E}}(\mathsf{x}) = -\sigma_{\mathfrak{a}} \mathsf{E}_{\mathfrak{0}}(\mathsf{x}) + \mathsf{Q}_{\mathfrak{0}}(\mathsf{x}). \tag{1.10}$$

Die skalare und vektorielle Bestrahlungsstärke, also E_0 bzw. \vec{E} , wurde in Abschnitt 1.2.2.3 eingeführt. Der Quellterm nullter Ordnung Q_0 stellt den über alle Richtungen integrierten Quellterm Q dar. Berücksichtigt man, analog dem Vorgehen bei \vec{E} , auch die Ausbreitungsrichtung im Integranden, ergibt sich der Quellterm erster Ordnung \vec{Q}_1 [45].

$$Q_0(x) = \int_{4\pi} Q(x, \hat{\omega}) d\omega, \quad \vec{Q}_1 = \int_{4\pi} Q(x, \hat{\omega}) \hat{\omega} d\omega$$

1.2.8 Reflektanzverteilung

Unter der Reflektanz (auch: Reflexionsgrad) versteht man im Allgemeinen das Verhältnis von eingestrahltem zu ausgestrahltem Licht. Genauer wird das Verhältnis von ankommenden Lichtstrom zu ausgehendem Lichtstrom beschrieben:

$$\rho = \frac{d\Phi_{o}}{d\Phi_{i}} = \frac{dL_{o} \cdot d\omega_{o}}{L_{i} \cdot d\omega_{i}} = r \cdot d\omega_{o}$$

Mit dieser Definition ist ρ invariant bzgl. L_i und d ω_i , beide Größen sind direkt proportional zu dL_o [55]. Allerdings besteht weiterhin eine Abhängigkeit von d ω_o und damit vom Messgerät, das heißt nicht nur von den Materialeigenschaften. Da aber eine exklusive Abhängigkeit von dem Material gewünscht ist, beschreibt man das Reflexionsverhalten oft mit nur einem Teil der Gleichung. Ein einfallendes Lichtbündel wird gemäß einer Verteilungsfunktion remittiert. Diese bidirektionale Reflektanz r wird definiert mit

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{i}, \vec{\omega}_{o}) = \frac{d\mathbf{L}_{o}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{o})}{\mathbf{L}_{i}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{i}) \cdot d\omega_{i}} = \frac{d\mathbf{L}_{o}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{o})}{d\mathbf{E}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{i})}.$$

Mit $\mu_0 = \cos \theta$ (Cosinus vom Polarwinkel des einfallenden Lichts) ist die bidirektionale Reflektanzverteilungsfunktion (BRDF) R definiert als

$$R(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = \frac{r(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)}{\mu_0} = \frac{dL_o(x, \vec{\omega}_o)}{L_i(x, \vec{\omega}_i) \cdot \mu_0 \cdot d\omega_i}.$$

Zum Teil wird der Faktor $\cos \theta$ auch als Teil der BRDF selbst betrachtet und nicht im Nenner mit aufgeführt. Ist das der Fall, gilt R = r. Dies soll hier aber nicht geschehen.

Integriert man die R über alle Reflexionswinkel, erhält man die (spektrale) *Albedo* a oder die "spektrale direktional-hemisphärische Reflektanz" [84]:

$$a(\vec{\omega}_i) = \int_0^1 \mu_o \, d\mu_o \int_{2\pi} R \, d\omega_o.$$

Wie in Gleichung (1.1) dargestellt, definiert sich die Bestrahlungsstärke E mit dem Integral der einfallende Strahldichten in der oberen Hemisphäre. Durch das Verhältnis von spezifischer Ausstrahlung M zur Bestrahlungsstärke kann ebenfalls die Albedo definiert werden [55]. Es wird der ankommende Strahlungsfluss durch den abgehenden geteilt:

$$a(\vec{\omega}_i) = \frac{M}{E} = \frac{\int_{2\pi} L(x_o, \vec{\omega}_o) d\omega_o}{E}$$

Für eine isotrop aus einer Hemisphäre eintreffende Strahlung kann die *diffuse Albedo* a_d berechnet werden [84]:

$$a_d = 2 \int_0^1 \mu_i a(\mu_i) \, d\mu_i$$

Wie viele Größen ist auch die (diffuse) Albedo eine spektrale Größe. Zur besseren Übersichtlichkeit wurde λ hier weggelassen. In den meisten natürlichen Umgebungen ist eine Linearkombination beider Albedos messbar.

$$\bar{a} = \gamma \cdot a_d + (1 - \gamma) \cdot a$$

Häufig wird die BRDF mit der Albedo normalisiert. Damit ist der Wertebereich überschaubar und eine Vergleich möglich. Diese normalisierte Form wird auch als anisotrope Reflektanzfunktion *f* bezeichnet:

$$f = \frac{\pi R}{a}$$



Abbildung 3: Streuungsverhalten von Licht in (a) einer BRDF und (b) einer BSSRDF, nach [45]

1.2.9 BSSRDF

Bei Vielfachstreuung handelt es sich um ein Phänomen, welches bei den meisten Materialien auftritt, wir aber oft nur bei transluzenten Objekten bewusst wahrnehmen.

Mittels einer sogenannten bidirektionalen Oberflächenstreuungs- und Reflexionsverteilungs-Funktion S (BSSRDF, engl. bidirectional subsurface scattering reflectance-distribution function) ist es möglich, diese Erscheinung analytisch zu beschreiben. Dabei wird die abgehende Strahldichte $L_o(x_o, \hat{\omega}_o)$ an Ort x_o in Richtung $\hat{\omega}_o$ in Relation zum einfallenden Strahlungsfluss $\Phi_i(x_i, \hat{\omega}_i)$ an Punkt x_i von Richtung $\hat{\omega}_i$ gesetzt [60].

$$S(x_i, \hat{\omega}_i, x_o, \hat{\omega}_o) = \frac{dL_o(x_o, \hat{\omega}_o)}{d\Phi_i(x_i, \hat{\omega}_i)}$$
(2)

Für die Simulation vieler Oberflächen ist eine bidirektionale Reflexionsverteilungsfunktion (BRDF, engl. bidirectional reflectance distribution function) ausreichend. Eine BRDF ist ein Spezialfall der BSSRDF, in dem x_0 gleich x_i ist, Lichttransport geschieht damit nur an einem Ort. Damit ist eine BRDF nicht geeignet, um Vielfachstreuung zu simulieren, Mit ihr kann der Lichttransport zwischen verschiedenen Orten nicht beschrieben werden.

Mittels Gleichung 1 für den Strahlungsfluss ist es möglich, Gleichung 2 abhängig von der eingehenden Strahlungsdichte zu berechnen:

$$S(x_{i}, \hat{\omega}_{i}, x_{o}, \hat{\omega}_{o}) = \frac{dL_{o}(x_{o}, \hat{\omega}_{o})}{d(\int_{A} \int_{2\pi} L_{i}(x_{i}, \hat{\omega}_{i})(\hat{\omega}_{i} \cdot \vec{n}) \ d\omega_{i} \ dx_{i})}$$
$$= \frac{dL_{o}(x_{o}, \hat{\omega}_{o})}{L_{i}(x_{i}, \hat{\omega}_{i})(\hat{\omega}_{i} \cdot \vec{n})}$$
(3)

Es kann also auf Basis einer BSSRDF die abgehende Strahldichte an jedem Punkt der Oberfläche berechnet werden. Damit aber nicht nur dessen Änderung bekannt wird, muss das Integral gebildet werden. Man betrachtet nun die gesamte einfallenden Strahldichte auf allen Punkten x_i mit der differentiellen Fläche A. Für die Vollständigkeit ist ein konstanter Term L_e notwendig—der Beitrag zur Strahldichte durch Emmission von Licht. Einfallendes Licht kann nur aus der oberen Hemisphäre

 Ω eintreffen, somit muss neben de Fläche auch nur über 2π Integriert werden:

$$L_{o}(x_{o}, \hat{\omega}_{o}) = \int_{A} \int_{2\pi} S(x_{i}, \hat{\omega}_{i}, x_{o}, \hat{\omega}_{o}) L_{i}(x_{i}, \hat{\omega}_{i}) (n \cdot \hat{\omega}_{i}) d\omega_{i} dx_{i}$$
(1.11)

Zur Vereinfachung wird die BSSRDF hier unabhängig von der Wellenlänge λ angegeben. Tatsächlich ist aber auch das Streuungsverhalten von Schnee nicht über alle λ gleich [87]. Es ändert sich beispielsweise der Brechungsindex über alle Wellenlängen hinweg. In Kapitel 3 wird darauf näher eingegangen.

Transluzente Medien, oft mit einer hohen optischen Dichte und häufiger Streuung, erlauben eine weitere Annäherung der BSSRDF. Sie kann als Summe von Einfach- und Vielfachstreuung verstanden werden [45]:

$$S(x_i, \hat{\omega}_i, x_o, \hat{\omega}_o) = S^{(1)}(x_i, \hat{\omega}_i, x_o, \hat{\omega}_o) + S_d(x_i, \hat{\omega}_i, x_o, \hat{\omega}_o)$$

Um hochgradig streuende transluzente Materialien darzustellen, genügt der diffuse Vielfachstreuungsanteil S_d. Die Einfachstreuung ist im Vergleich zu diesem sehr gering. Daher wird sie gerade von interaktiven BSSRDF-Renderingverfahren nicht berücksichtigt—zugunsten der Renderingzeit [72]. In welcher Farbe wir Schnee wahrnehmen ist durch eine Reihe verschiedener Faktoren bestimmt. Da Schnee von allein kein Licht emittiert, können nur die Komponenten des einfallenden Lichts remittiert¹ werden. Die Bestandteile von Schnee-das sind hauptsächlich gefrorenes Wasser und Luft-bestimmen, welche Wellenlängen grundsätzlich wieder abgegeben werden können. Oberflächeneigenschaften wie Krümmung, Schneedicke sowie die Struktur und Korngröße haben ebenfalls wichtige Rollen. Es bieten sich damit verschiedene Herangehensweisen an, um Schnee darzustellen. Das spiegeln auch die bisherigen und aktuell verwendeten Methoden wieder. In der Computergrafik ist oft eine physikalische Basis wünschenswert, jedoch nicht immer möglich, praktikabel oder performant genug. Ist Realitätsnähe das Ziel, stellt sich also die Frage, ob das Ergebnis "nur" gut aussehen, oder ob der Weg zum Bild ebenfalls vereinbar mit der wirklichen Welt sein soll. Die bisher veröffentlichen Methoden zur Visualisierung von Schnee zählen in den meisten Fällen nicht zu den physikalisch basierten.

Nishita et al. [61] bauten ihr 1997 veröffentlichtes Schneemodell auf einer impliziten Beschreibung des Schneevolumens auf. Dabei kamen die von Blinn beschriebenen Metaballs [8] zum Einsatz². In der Veröffentlichung wird deutlich darauf hingewiesen, dass Phänomene aufgrund von Vielfachstreuung für eine realistische Schneedarstellungen Berücksichtigung finden müssen. Um die Lichtausbreitung in Schneevolumen zu simulieren, wird dieses in Voxel (Volumenelemente) unterteilt und für jede Zelle die abgehende und ankommende Energie ermittelt. Für deren Berechnung wird die stark forwärtsgerichtete Streucharakteristik (Phasenfunktion) berücksichtigt. Bei einer gerichteten Lichtquelle kann durch die starke vorwärtsstreuung eine effiziente Auswertungsstrategie verfolgt werden. Es können diejenigen Voxel bevorzugt ausgewertet werden, deren Einfluss auf die Blickrichtung groß ist. Ist das Energiefeld in der Schneedecke berechnet, kann die Strahldichte entlang eines Kamerastrahls des Raytracing-Prozesses berechnet werden. Dies geschieht durch Integration entlang des Strahls. Mit diesem Ansatz können Streuereignisse von mindestens dritter Ordnung berücksichtigt werden [61].

Von Rosado [70] wurde 2004 ein pragmatischer Echtzeitansatz zur Schneevisualisierung verfolgt. Eine Kombination von Vertex- und Fragment-Shadern sorgt ohne tiefergreifende Berechnungen für einen Schneeeindruck, der zumindest mit etwas Entfernung glaubwürdig wirkt. Ef-

¹ Man spricht von Remission, wenn Licht von einem Hindernis absorbiert, hindurch gelassen oder gestreut wird, wenn es nicht direkt reflektiert wird.

² Metaball: Ein dehnbares kugelförmiges Objekt. Sind mehrere dieser Art vorhanden. können diese in einander übergehen

fekte der Vielfachstreuung werden damit jedoch nicht berücksichtigt. Im Wesentlichen wird der diffuse Anteil lediglich als (linear) interpolierte Farbe zwischen einem hellen Blau und Weiß ausgedrückt. Der jeweilige Anteil wird durch den in das Intervall [0, 1] projizierten Cosinuswert zwischen Normale und Betrachter definiert. Über eine Normalenkarte werden wie im Bump-Mapping zusätzliche Details erzeugt. Schneetypisches Glitzern wird darüber hinaus durch zufällige direkte Reflexion mancher Pixel realisiert.

Ein einfaches Monte-Carlo-Verfahren wurde 2005 von Chrisman [18] untersucht. Durch ein einfaches Akkumulationsverfahren wurde eine Schneedecke durch Kugeln verschiedener Größe dargestellt. Ihr Radius bewegt sich gleichverteilt um einen zuvor definierten Wert. Die Bildberechnung erfolgt durch einfaches Monte-Carlo-Raytracing, dessen Strahlen über viele Streu- und Absorptionsereignisse verfolgt werden. Der Streuwinkel wird dabei durch eine von Bohren und Barkstrom [12] vorgeschlagene Phasenfunktion ermittelt. Die Ergebnisse sehen vielversprechend aus, jedoch ist die notwendige Anzahl an Primitiven und der Monte-Carlo-Ansatz vor allem für größere Szenen nicht mehr praktikabel. Speicher und Rechenaufwand wachsen zu schnell. Das Modell berücksichtigt weiterhin keine Absorption und kann somit nicht die blaue Färbung des Lichts nach einer Vielzahl von Streuereignissen wiedergeben. Feine Oberflächenstrukturen sind durch die Modellierung mittels Kugeln jedoch sehr gut erkennbar.

Um Schnee in Echtzeit darzustellen, wurde 2010 von Liu [52] ein weiterer Ansatz entwickelt. Die Schneeoberfläche wird hier wie bei Rosado als Dreiecksnetz angenommen. Um eine große Menge an Dreiecken zu vermeiden, wird auch hier mittels Bump-Mapping der Detailgrad der Oberfläche erhöht. Ein alternativer Ansatz zur lokalen Selbstbeschattung-Horzon Mapping-wurde ebenfalls implementiert, aber als nicht tauglich befunden. Jedem Fragment wurde der größte Winkel zu anderen Oberflächenpunkten in unterschiedlichen Richtungen zugeordnet. Zur Laufzeit wird derselbe Winkel zwischen Fragment und Lichtquelle berechnet und somit ein Vergleich zum gespeicherten bzw. interpolierten Winkel möglich. Die resultierenden Schattierungen sind jedoch, aufgrund der diskreten Natur der Winkelkarte, unbefriedigend. In seinem Modell wurde Vielfachstreuung abhängig von der Krümmung vereinfacht angenähert. Jedem Pixel wird seine mittlere Krümmung zugeordnet. Für konkave Regionen geht Liu von einer Interreflexion zwischen verschiedenen Punkten der Umgebung aus und hellt diese Stellen auf. Wächst die Krümmung über eine bestimmte Größe, wird das Fragment jedoch dunkler gezeichnet. Begründet wird dies damit, dass Licht bei einer zu großen konkaven Krümmung andere Stellen nicht mehr erreichen kann. Konvexe Oberflächen können Effekte der Volumenstreuung deutlich machen. Liu simuliert das indem Fragmenten konvexer Oberflächen ein größerer Anteil der Farbe Blau gegeben wird. Dies geschieht in Abhängigkeit der Position zum Betrachter und zur Lichtquelle. Die Berechnungen und Werte in diesem Modell sind empirischer Natur und entbehren jeder physikalischen Grundlage. Bis auf den mittels Blooming-Filter realisierten Glitzereffekt, büßt das Modell leider aufgrund verschiedener Artefakte an Realitätsnähe ein und vermag nicht so recht zu überzeugen. Volumenstreueffekte auf Basis lokaler Krümmungseigenschaften zu realisieren, scheint dennoch ein interessanter Weg für die Echtzeitgrafik zu sein.

Die Messung optischer Eigenschaften von Schnee beschäftigt die Wissenschaftsgemeinschaft schon eine längere Zeit. Eine der ersten ausführlichen Messungen der direktionalen Reflektanz von Schnee wurden 1952 durch Middleton und Mungall [58] mit Hifle eines Goniophotometers ermittelt. Daraus resultierte ein einfaches theoretisches Modell zur Berechnung der Strahldichte von Schneeoberflächen auf Basis der diffusen und spekularen Reflektanz (abhängig vom Einstrahlungswinkel des Lichts). Vielfachstreuung wurde als Erklärung für den diffusen Anteil jedoch nicht berücksichtigt. Weitere Messungen folgten (z.B. Thomas in 1963 [77]), jedoch konnten nicht alle Effekte mit den entstanden theoretischen Modellen erklärt werden. Manche Messungen waren zum Teil sogar das Gegenteil von bisherigen Berechnungen. Barkstrom allein [5] und mit Bohren [12] führten viele Beobachtungen auf Vielfachstreuung zurück. Sie (und auch andere) führten aufwändigere Strahlungstransportberechnungen durch, um das Strahldichtefeld zu berechnen. Vor allem konnte die LORENZ-MIE-Theorie das stark vorwärts gerichtete Strahlungsmuster an einzelnen Eisteilchen sehr gut erklären. Diese ist anwendbar, wenn der Durchmesser der Teilchen in etwa der Wellenlänge des auftreffenden Lichts entspricht.

Die Vielfachstreuung wurde daraufhin als Komponente mit dem größten Anteil an der Strahldichte gesehen. Trotz der Nähe der Eisteilchen zueinander kann die Strahlungstransportgleichung problemlos verwendet werden. Nahfeldeffekten wurde im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums bisher noch keine Bedeutung beigemessen. Der Abstand zwischen einzelnen Teichen ist in Schneedecken immer noch deutlich größer als die Wellenlänge, selbst wenn der Abstand klein im Vergleich zum Radius ist. Zu dieser Erkenntnis kommen Wiscombe und Warren und liefern in ihrem Artikel von 1980 [87] einen guten Überblick über die bis dahin verwendeten Methoden und deren Ergebnisse. Warren veröffentlichte 1982 [84] ein eigenes BRDF-Modell, welches auf Vielfachstreuung der gemessenen Sonnenstrahlung beruht. Ist die Lichtquelle fix und geht man von einem plan-parallelen halbunendlichen Medium aus, kann die Vielfachstreuung integriert werden. Das Ergebnis ist eine BRDF. In einem der Farbe, also der Interaktion mit dem sichtbaren Teil des Spektrums, dediziertem Artikel von Bohren aus 1983 [10] wird noch einmal deutlich darauf hingewiesen, dass die Ursache für das eis- und schneetypisches Blau nicht allein mit der Streuung erklärbar wären. Die Theorie, dass RAYLEIGH-Streuung für diese Färbung verantwortlich sei, hielt sich lange. Bohren führt dies auf einen Artikel von Raman aus dem Jahr 1923 zurück. Jedoch ist hauptsächlich LORENZ-MIE-Streuung vorhanden und der lange Pfad, den ein Photon in einer

Schneedecke zurücklegt, führt mit höheren Wellenlängen (im sichtbaren Bereich) zu einer höheren Absorption. Vor allem rote Bestandteile werden auf diesem Weg weggefiltert. Dozier et al. konnten 1988 [39] feststellen, dass nicht alle Elemente des Streumusters durch die Verwendung der LORENZ-MIE-Streuung und die verbundene Annäherung der Teilchen durch kugelförmige Objekte, erklärt werden könne. Eine vorhandene aber kleine Rückwärtsstreuung bei 400–500nm kann mit den bisherigen Modellen nicht erklärt werden. Gleichzeitig wird aber Wiscombes und Warrens Modell [87] bestätigt, auf das Ergebnis hätte die Rückwärtsstreuung kaum Einfluss. Systematische Messungen wurden erstmals von Kaasalainen et al. 2006 [47] gemacht. Darauf aufbauende Modelle wurden hier aber nicht weiter betrachtet.

Während Wiscombe und Warren eine Annäherung der Microstruktur der Eisteilchen durch Kugeln mit demselben Verhältnis vom Volumen zur Fläche mit einem für sie hinnehmbaren Fehler von maximal 1% begründeten [87], gingen Kokhanovsky und Zege 2004 [48] näher auf die Auswirkungen nicht-kugelförmiger Annäherungen ein. Damit einher geht die Verwendung einfacher Gleichungen der geometrischen Optik statt aufwändiger LORENZ-[?]-Berechnungen für die lokalen Schneeeigenschaften. Sie liefern gleichzeitig eine Begründung, weshalb die Kugelannäherung dennoch häufig mit den gemachten Beobachtungen übereinstimmen. Da ihr Forschungsfeld die Fernerkundung ist, werden komplexe Modelle des Strahlungstransfers durch einfache analytische Beschreibungen ersetzt. Zur Berechnung der globalen Eigenschaften mag dies ein nachvollziehbarer Weg sein, jedoch nützen die entstehenden exponentiellen Beschreibungen des asymptotischen Verhaltens des Lichts in Schneedecken für die Betrachtung der (lokalen) Vielfachstreuung wenig. Das präsentierte BRDF-Modell ist jedoch sehr präzise.

Frisvad, Christensen und Jensen stellen 2007 außerdem in [29] eine Verallgemeinerung der LORENZ-MIE-Theorie dar. Diese kann im Gegensatz zur ursprünglichen Theorie mit Absorption umgehen. Die Menge der Medien, deren optische Eigenschaften dadurch beschrieben werden können, ist damit erheblich größer geworden. Es ist dadurch recht einfach möglich geworden, verschiedene Komponenten des Mediums zu berücksichtigen, die Einfluss auf die optischen Eigenschaften haben. Das Vorkommen von Algen, Salz und anderen Mineralien in Seeeis kann somit modelliert und in bestehenden Vielfachstreuungsmodellen genutzt werden.

Auch können Darstellungsmöglichkeiten von Schnee verschiedener Medien, deren Interaktion mit Licht zu Vielfachstreuung führt, relevant sein. So sind z.B. Wolken dem Schnee in vielerlei Hinsicht ähnlich. Der größte Unterschied ist der Durchmesser der Eisteilchen. Dieser ist in einer Schneedecke deutlich größer. Nahfeldeffekte spielen wie bereits erwähnt keine nennenswerte Rolle für den sichtbaren Bereich des Spektrums und so können ähnliche Methoden als Ausgangspunkt genutzt werden. Im Bereich der Computerspiele hat Subsurface Scattering seit einiger Zeit Einzug gehalten. Viele moderne Titel bzw. die darunter liegenden Renderer und Engines sind fähig, transluzente Objekte darzustellen. Eine Voraussetzung für die Verwendung in diesem Kontext ist die Echtzeitfähigkeit. Jedoch ist es nicht möglich, eine vollständige physikalisch korrekte Simulation der Vielfachstreuung im Bruchteil einer Sekunde zu berechnen. Verschiedene Techniken wurden jedoch entwickelt, um den Effekt anzunähern. Im Spiel *Crysis* war Subsurface Scattering vor allem für dünne transluzente Schichten, wie zum Beispiel Palmenblätter, gewünscht. Dies wurde mittels einer zweiseitigen Beleuchtung realisiert, die auf einer "Subsurface Texture Map" aufbaut [75]. Eine Art Alpha-Textur stellt die lokalen Absorptionseigenschaften des Materials dar. Diese Methode funktioniert aber leider nicht so gut für dickere Medien [7], die Vielfachstreuung in Schneeoberflächen wäre damit nicht praktikabel darzustellen. Schnee stellt einen wesentlichen Anteil der Kryosphäre dar. Für unser Klima ist dieser Teil der Erdoberfläche enorm wichtig, denn er ist mit Wasser in fester Form bedeckt. Eine Ursache für seinen Einfluss ist dessen große Albedo, das Rückstrahlvermögen, von bis zu 90%. Dementsprechend gering ist die Absorption der einfallenden Sonnenenergie. Erst dadurch werden vor allem die saisonalen Schneemassen auch ein wichtiger Wasserspeicher. Vor allem in mittleren Breiten sind sie die Hauptquelle für Flüsse und Grundwasser.

Die ersten Messungen und Überlegungen zu den optischen Eigenschaften von Schnee entstanden in den Bereichen der Geophysik, Optik und Klimatologie. Im wesentlichen waren es zwei Anwendungen, die die ersten Messungen vor knapp 60 Jahren motivierten. Zum einen spielt Schnee eine große Rolle im Strahlungshaushalt der Erde. Schnee hat eine relativ große Albedo und damit ist die einfallende Strahlung auf Schneemassen eine dominante Größe bei der Strahlungsbilanz. Zum anderen erfordert der Bereich der Fernerkundung (engl. remote sensing) ein sehr genaues Bild der optischen Eigenschaften von Schnee, vor allem ihrer spektralen Abhängigkeiten. Für diese Anwendungsgebiete waren hauptsächlich die Bereiche des elektromagnetischen Spektrums von interesse, der für die klimatologische Rolle von Schnee von Bedeutung sind und die Schneeschmelze beeinflussen [84]. Das sind die solaren $(0.3 \le \lambda \le 5 \ \mu\text{m})$ und die thermisch infraroten $(5 \le \lambda \le 40 \ \mu\text{m})$ Wellenlängen. Wellenlängen unter 0.3 µm werden in der oberen Atmosphäre absorbiert.

Middleton und Mungall stellten 1952 ein Modell für die richtungsabhängige Lichtreflexion von Schnee auf [58]. Mittels eines sog. Goniophotometers wurde Schnee von verschiedenen Winkeln ausgehend von einem Meridian beleuchtet. Die Leuchtdichte wurde dann mittels eines Photonenvervielfachers¹ über dem Meridian aufgezeichnet. Für verschiedene Schneetypen wurden damit Reflexionsprofile erstellt. Daraus war ersichtlich, welche Schneetypen für besonders hohe Reflexionsgrade verantwortlich sind. Im Ergebnis war zu erkennen, dass bei Einfallswinkeln kleiner 45° im Wesentlichen nur diffuse Reflexion vorhanden ist. Für höhere Winkel ist der spekulare Anteil aber zunehmend wichtiger. Die FRESNELschen Reflexionskurven verzeichnen eine starke Vergrößerung des Anstiegs bei Einfallswinkeln größer 45°. Daher ist das Maximum des spekularen Anteils zu einem höheren Reflexionswinkel als dem Einfallswinkel verschoben.

¹ Ein Photonenvervielfacher ist eine Vakuumröhre. Sie ist extrem empfindlich für Licht im UV-, sichtbaren und IR-Bereich. Licht aus diesem Bereich wird bis zu 100 Mio. fach verstärkt.

Das Messen eines Parameters führt oft dazu, dass verschiedene Klassen des Messobjektes festgelegt werden können. In Hinsicht auf die spekulare Lichtreflexion haben Middleton und Mungall 1952 sechs Schneetypen nach ihrer spekularen Komponente aufsteigend klassifiziert: 1. Oberflächenreif, 2. sich bindender Schnee, 3. Neuschnee, 4. Harsch und windgepresster Schnee; sowie 5. Glatteis [58]. Durch ihren hohen Anteil an spekularer Reflexion könnten aber nur Nummer 4. und 5. gefährlich für Piloten (Blenden) werden. Zumindest von Christie wurde 1953 darauf hingewiesen [19], dass diese Schlussfolgerung nicht so leicht zu treffen sei. Er benennt Schwierigkeiten, die mittels eines Goniophotometers erfassten Daten auf das Problem der Piloten anzuwenden. Außer den bisher genannten sind folgende Schneetypen zu unterscheiden: Altschnee, Tiefenreif und Hagel. Diese wurden nicht vermessen, jedoch erstellte man auf Basis der ermittelten Daten ein mathematisches Modell, welches die spekulare Komponente simuliert.

3.1 AKKUMULATION

3.1.1 Korngröße

Einige der vorhandenen Modelle berücksichtigen die Korngröße der Eiskristalle. Betrachtet man Schneeflocken, kann diese bei einer derartig vielfältigen Erscheinung nur gemittelt angegeben werden. Ihre Form ist nach der Landung "glücklicherweise" nicht von langer Dauer. So zitieren Wiscombe und Warren in [87] Liljequist, Sommerfeld und LaChapelle sowie Colbeck. Diese sehen verschiedene Ursachen für die Annäherung an eine Kugel. Zum einen sorgt der Wind für viele Brüche und somit für eine Reduktion der Größe. Auch bei gleichbleibender Temperatur setzt eine Metamorphose ein. Wassermoleküle ändern ihren Platz um die freie Oberflächenenergie bzw. "Freie Energie" zu minimieren. Diese Größe ist proportional zum Quotienten aus Fläche zu Volumen $\left(\frac{A}{V}\right)$, der wiederum bei einer Kugel am niedrigsten ist. Damit begründet sich das Streben nach einer Kugelform. Da $\frac{A}{V}$ für größere Kugeln kleiner ist, bilden sich tendenziell eher größere als kleinere Eisteilchen. Eine höhere Temperatur wirkt sich positiv auf die Geschwindigkeit der Anordnungsänderungen aus. Am Schmelzpunkt ist dies sogar wahrnehmbar. Nach und nach bilden sich somit runde Kristalle ähnlicher Größe.

Laut [87] sind im Allgemeinen nur die oberen 10–20 cm einer Schneeoberfläche für das Albedo verantwortlich. In diesem Bereich ändert sich die Korngröße mit weniger als 50%.

Mit Blick auf einige Untersuchungen sind durch Warren und Wiscombe die in Tabelle 1 angegebenen mittleren Korngrößen vorgeschlagen.

3.1.2 *Dichte*

Je nach Flockentyp, Witterungsbedingungen, Schneemenge und Alter kommt Schnee in unterschiedlichen Dichten vor. Es gilt, die Dichten der

Schneetyp	Korngröße (in µm)	
Neuschnee	20-100	
Feinkörniger alter Schnee	100–300	
Alter Schnee nahe dem Schmelzpunkt	1000–1500	

Tabelle 1: Korngrößen verschiedener Schneetypen, nach [87]

gesamten Schneemasse (makroskopisch, Massendichte) und des einzelnen Eiskristalls (mikroskopisch, Teilchendichte) zu unterscheiden. Die Massendichte verschiedener Schneetypen ist in Tabelle 2 angegeben. Sie erstreckt sich über einen sehr großen Bereich. Die angegebenen Massendichten sind als Rohdichte zu verstehen. Sie schließen also die Porenräume ein.

Schneetyp	Dichte (in kg \cdot m ⁻³)	
trockener, lockerer Neuschnee	30-50	
gebundener Neuschnee	50-90	
stark gebundener Neuschnee	100-200	
trockener Altschnee	200–400	
feuchtnasser Altschnee	300-500	
mehrjähriger Firn	500-800	
Gletschereis	≈ 800	
Eis bei 0°C	917	
Wasser	1000	

Tabelle 2: Dichte ρ verschiedener Schneetypen, nach [28] und [86]

In Abschnitt 1.2.3 wurde die Teilchendichte benötigt, um aus den Wirkungsquerschnitten die entsprechenden Koeffizienten zu errechnen (z.B. $\sigma_s = NC_{sca}$). Diese Proportionalität besteht nur, wenn die Partikelanordnung zufällig und der Abstand der einzelnen Teilchen ausreichend groß ist [12]. Die Teilchendichte N steht dabei für die Teilchen pro Volumeneinheit. Wie in Abschnitt 3.1.1 beschrieben, können Eisteilchen als kugelförmig angenommen werden. Für kugelförmige Teilchen mit dem Volumen V_d besteht ein Zusammenhang der Teilchendichte zur Rohdichte [12]:

$$N = \frac{1}{V_d} \frac{\rho}{\rho_i} = \frac{6}{\pi d^3} \frac{\rho}{\rho_i}$$
(3.1)

Dabei ist d der Durchmesser der Teilchen, ρ die Schneedichte und ρ_i die Dichte von homogenem Eis. Den Anteil an Eis innerhalb eines Schneevolumens erhält man, indem die Multiplikation mit V_d weggelassen wird: $\frac{\rho}{\rho_i}$.

Da die Dichte des Schnees einen Einfluss auf einige optische Eigenschaften besitzt, dies jedoch zum Teil mit der Schneetiefe kompensiert werden kann, wird gelegentlich auch mit dem *Wasseräquivalent* W gerechnet. Dieses ergibt sich aus Dichte ρ und der Schneetiefe z nach

 $W = \rho z$.

Es stellt die Menge an Wasser dar, welche entstünde, wenn man den Schnee schmelzen würde.

3.2 OPTISCHE EIGENSCHAFTEN

Schnee ist ein Gemisch aus Eiskristallen, Wasser und Wasserdampf. Der Anteil des Eises beträgt dabei, je nach Dichte, häufig nur 10 bis 20% des Volumens. Neben den in diesem Abschnitt beschriebenen Kristallcharakteristika spielen auch die Dicke und die Temperatur der Schneemasse eine große Rolle für das Verhalten gegenüber elektromagnetischer Strahlung. Je wärmer die Luft ist, desto mehr Wasserdampf kann sie halten. Wird die maximale Luftfeuchtigkeit überstiegen, wandelt sich bei Plusgraden der nicht sichtbare Wasserdampf zu Nebel und bei Minusgraden zu Eis um. Ist die Schneehöhe größer als die Eindringtiefe der Wellenlänge kann das Medium als halbunendlich betrachtet werden. Für den sichtbaren Bereich der Sonnenstrahlung muss typischer Neuschnee ($\rho \approx 100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) dazu mindestens eine Dicke von 20cm haben.

Wie im Abschnitt 1.1 angedeutet, wird vor allem rotes Licht von Schnee absorbiert. Diese Absorption im sichtbaren Bereich des Lichts ist zwar sehr gering, führt aber zu dem blauen Schimmer, den Schnee und vor allem Eis mit sich bringen (können). Die hauptsächlich vorwärts gerichtete Streuung im Schnee vergrößert vor allem die Eindringtiefe der Photonen. Da diese aber im sichtbaren Bereich kaum eine Wellenlängenabhängigkeit besitzt, trägt sie auch kaum zur Farbgebung bei. Dafür aber zur Albedo, welches, wie Abschnitt 3.2.5 zeigen wird, sehr hoch ist.

Wie auch Bohren [10] sowie Bohren und Barkstrom [12] nehmen wir Schnee als eine Ansammlung von unabhängigen kugelförmigen Eiskörnern an. Dass dies gerechtfertigt ist, wurde in Abschnitt 3.1.1 beschrieben.

3.2.1 Absorptions-, Streuungs- und Schwächungskoeffizient

Im wesentlichen kann ein Photon im Schnee gestreut werden, wenn es eine Luft-Eis-Grenzfläche passiert. Zur Absorption kann es nur kommen, während sich das Photon durch das Eisteilchen hindurch bewegt. Mit höherer Korngröße ist diese Strecke länger und somit steigt die Wahrscheinlichkeit zur Absorption. Diese Wahrscheinlichkeit ist mit Hilfe des Absorptionsquerschnitts durch die Einfach-Streu-Albedo beschrieben (siehe Abschnitt 1.2.3).

Vor allem zur Berechnung der Albedo von Schnee stellt der Absorptionskoeffizient σ_a eine wichtige Größe dar. Die 1981 veröffentlichten Messung von Grenfell [32] der lichtfrequenzabhängigen Absorption im Bereich von 0.4 bis 1.4 µm sowie die Ergebnisse von Perovich und Govoni von 1991 für 0.25 bis 0.4 µm decken den sichtbaren Bereich des Lichts gut ab. Beide Messungen sind in Abbildung 4 dargestellt. Aufgrund der geringen Absorption von Eis und Schnee sind die Absorptionskoeffizienten hier in $\frac{1}{m}$ angegeben². In den zugrunde liegenden Experimenten wurde sehr darauf geachtet, die Streuung zu minimieren. Es wurde klares blasen- und einschlussfreies Eis wachsen gelassen. Das Ergebnis beinhaltet somit einen vernachlässigbaren Anteil an Streuung.



Abbildung 4: Absorptionskoeffizient $\sigma_{a,Eis}$ von reinem Eis und Schnee mit $\rho = 430 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (berechnet nach Gleichung (3.3)).

Wellenlänge	Schnee nach (3.3)	Eis nach [32]	
0.400	0.0502	0.085	
0.450	0.0254	0.043	
0.500	0.0283	0.048	
0.550	0.0419	0.071	
0.600	0.0709	0.120	
0.650	0.1631	0.276	
0.700	0.3072	0.520	

Tabelle 3: Absorptionskoeffizienten σ_a in $\frac{1}{m}$ für Schnee mit einer Dichte von 430 kg · m⁻³ sowie für reines Eis

Die Eisteilchen sind im Vergleich zu den Wellenlängen des sichtbaren Lichts genügend groß, um ihre Absorption mit Hilfe der geometrischen Optik zu beschreiben [10]. Um den Absorptionsquerschnitt C_{abs} von Schnee zu berechnen, kann damit nach Bohren folgende Beziehung zur Annäherung genutzt werden:

$$C_{abs} = \frac{\pi \sigma_{a,Eis} d^3}{6n} [n^3 - (n^2 - 1)^{3/2}]$$
(3.2)

Dabei ist n der Realteil des relativen Brechungsindex des Mediums (hier Eis) zu seiner Umgebung (hier Luft) und σ_a stellt den Absorpti-

² Beim Vergleich der Werte mit den Beispielen aus [45] ist dies zu beachten.

onskoeffizienten dar. Die Gültigkeit dieser Annäherung ist nach [10] für den hier betrachteten Fall gegeben und wurde sogar noch auf Kugeln beliebiger Größe (in weiten Grenzen) weiterentwickelt. Ebenfalls gilt Gleichung (1.4) für die Annäherung von C_{ext} .

Für den Brechungsindex von n = 1.32 ergibt sich durch Gleichung (3.2) ein Absorptionsquerschnitt von

$$C_{abs} = 0.84 \cdot \sigma_{a,Eis} \cdot d \cdot G.$$

Dabei wird sich auf den Absorptionskoeffizient von reinem Eis bezogen und G stellt den geometrischen Querschnitt dar. Verwendet man wie Bohren und Barkstrom [12] zusätzlich die durch Gleichung (3.1) beschriebene Teilchendichte, ergibt sich der Absorptionskoeffizient von Schnee als

$$\sigma_{a} = 1.26\sigma_{a,\text{Eis}}\frac{\rho}{\rho_{i}}.$$
(3.3)

In derselben Veröffentlichung wird aber auch darauf hingewiesen, bei Schneedichten größer $450 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ die Gleichung mit Vorsicht zu betrachten. Die Basis an experimentell ermittelten Daten sei (noch) nicht ausreichend. In den durchgeführten Tests konnte dahingehend aber kein Problem festgestellt werden. Kokhanovsky und Zege [48] kommen ebenfalls auf eine Darstellung die Gleichung (3.3) sehr ähnlich ist (jedoch mit 1,27 statt 1,26). Abbildung 4 und Tabelle 3 stellen die Absorptionskoeffizienten für Schnee mit einer Dichte von 430kg \cdot m⁻³ nach dieser Gleichung dar.

Die messtechnische Erfassung der verschiedenen Parameter gestaltet sich schwierig. Viele Faktoren beeinflussen das Ergebnis und vor allem führt die Vielfachstreuung zu schwer vergleichbaren Werten. Die Tatsache, dass Vielfachstreuung hier eine wichtige Größe für den Strahlungstransport darstellt, führt zu einigen Problemen: Die Schwächungskoeffizienten sind abhängig von der Polarisation des Lichts, dem Ort der Stichprobe im Schnee sowie der Geometrie dessen Oberfläche [12]. Bohren und Barkstrom teilen den Schnee konzeptuell in eine äußere Grenzschicht und ein inneres Diffusionsgebiet auf. In der inneren Schicht bewegen sich die Photonen häufig und über relativ große Distanzen. Damit kann ihr Verhalten mit Hilfe der in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Diffusionstheorie erklärt werden [12]. Gemessene Schwächungskoeffizienten aus dieser Region ($\tau > 5$ –10) können aber zu den tatsächlichen Koeffizienten in Bezug gesetzt werden. In derselben Veröffentlichung stellen Bohren und Barkstrom diesen sogenannte asymptotischen Schwächungskoeffizienten σ_{tr} frequenzabhängig für die Diffusionsregion mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten, der Dichte und der Korngröße dar³:

$$\sigma_{tr} = 0.845 \cdot \sqrt{\frac{\sigma_{a,Eis}}{d}} \cdot \frac{\rho}{\rho_{Eis}}$$
(3.4)

³ In [12] ist σ_{tr} als K_s bezeichnet.

Im weiteren soll σ_{tr} als effektiver Transportkoeffizient bezeichnet werden. Diese Bezeichnung wird auch im Zusammenhang mit der später verwendeten Diffusionstheorie verwendet. Der Bezug von σ_{tr} zu σ_t wird durch die verwendete Phasenfunktion bestimmt. Barkstrom [5] zeigte, dass isotrope Streuung (p = $\frac{1}{4\pi}$ und damit g = 0) in einer exakten Lösung der Strahlungstransportgleichung zu folgendem Zusammenhang führt:

$$\sigma_{t} = \sigma_{tr} \cdot \nu_{0} \tag{3.5}$$

Bohren und Barkstrom [12] führen weiter aus, dass dieser Zusammenhang auch im Fall von komplizierteren Streumustern in Schnee gilt. Dazu formulieren sie den Eigenwert v_0 der Strahlungstransportgleichung als $v_0 \approx 1/\sqrt{3(1-\Lambda)(1-g\Lambda)}$. Diese Beziehung ist sehr empfindlich gegenüber Änderungen der Einfachstreu-Albedo A. Sinkt diese nur auf 0.990 ist v_0 nicht mal mehr ein Zehntel so groß wie vorher. In der Diffusionstheorie wird häufig auf die sogenannte Theorie der Momentenähnlichkeit (siehe Seite 47) zurückgegriffen, um anisotrope Streuung besser als Diffusionsprozess beschreiben zu können. Dieser Theorie entspringen die Zusammenhänge $\sigma'_s = \sigma_s(1-g)$ und $\sigma'_t = \sigma'_s + \sigma_a$. Zusammen mit der Beziehung $\sigma_{tr} = \sqrt{3\sigma_a \sigma'_t}$ [45] und Gleichung (3.4) ergibt sich

$$\sigma_{t} = \sigma_{s} + \sigma_{a} = \frac{\sigma_{tr}^{2} - 3\sigma_{a}^{2}}{3\sigma_{a}(1-g)} + \sigma_{a}$$
(3.6)

Es existieren außerdem weitere Annäherungen für den Schwächungskoeffizienten. Das Schneedeckenmodell SNOWPACK⁴ der SLF nutzt in seiner ursprünglichen Form eine frequenzunabhängige Formulierung. Diese scheint aber vor allem wegen der spektralen Unabhängigkeit für eine detaillierte Berechnung der Strahlungsabschwächung ungeeignet [54]:

$$\sigma'_{t,SLF} = \frac{\rho}{c_1} + c_2$$

Die beiden Konstanten werden durch Meirold-Mautner [54] mit $c_1 = 10 \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ und $c_2 = 30 \text{m}^{-1}$ angegeben. Die Dichte ρ von Schnee trägt hier die Einheit kg \cdot m⁻³. Im Beispiel aus Tabelle 4 beträgt $\rho = 430 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Gleichung (3.7) würde also einen reduzierten Schwächungskoeffizienten von 73m⁻¹ beschreiben. Darauf aufbauend lässt sich ebenfalls σ_t berechnen:

$$\sigma_{t} = \frac{\sigma_{t}' - \sigma_{a}}{1 - g} + \sigma_{a} = \frac{\frac{\rho}{c_{1}} + c_{2} - \sigma_{a}}{1 - g} + \sigma_{a}$$
(3.7)

Mit Hilfe der Verallgemeinerung der LORENZ-MIE-Theorie von Frisvad et al. [29] ist es ebenfalls möglich die optischen Eigenschaften von Schnee zu bestimmen.

⁴ Ein vom Swiss Federal Institute for Snow and Avalanch Resaerch (SLF) entwickeltes Modell um genaue Informationen über den Zustand einer Schneedecke zu errechnen.

Wellenlänge	Gl. (3.5)	Gl. (<u>3.6</u>)	Gl. (3.7)
0.400	2148.1	1968.1	486.4
0.450	2148.2	1968.2	486.5
0.500	2148.2	1968.2	486.5
0.550	2148.1	1968.1	486.4
0.600	2148.1	1967.9	486.2
0.650	2147.8	1967.4	485.7
0.700	2147.5	1966.6	484.9

In Tabelle 4 werden die verschiedenen Berechnungen für Schnee einer Dichte von 430kg \cdot m⁻³ mit einer Korngröße von 0.3 mm dargestellt. Die Dichte von Eis wurde dabei mit 917kg \cdot m⁻³ angenommen.

Tabelle 4: Die verschiedenen Berechnungsarten des Schwächungskoeffizienten von Schnee mit $\rho = 430 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ und einer Eiskorngröße von 0.3mm. Der Anisotropiefaktor beträgt g = 0.85 und die Einfachstreu-Albedo $\Lambda \approx 0.99998$

Es gibt damit eine Reihe verschiedener Berechnungsmöglichkeiten für den Schwächungskoeffizienten. Die Auswirkungen und Resultate dieser unterschiedlichen Ansätze werden in Abschnitt 6 dargestellt. Aus den zuvor dargestellten Koeffizienten lassen sich Diffusionsprofile für die Lichtausbreitung in Schnee erstellen. Im Folgenden soll dies für Werte von Gleichung (3.5) geschehen. Mit Diffusionsprofilen kann die Menge an gestreutem Licht beschrieben werden, die nahe dem Streuzentrum aufgrund eines Streuereignisses vorhanden ist. Dies geschieht abhängig von der Entfernung r vom Streuzentrum. Unter der Annahme, dass sich diese als Diffusionsprozess beschreiben lässt, können Techniken der Diffusionsapproximation verwendet werden, um den Reflexionsgrad R zu errechnen. Da vor allem σ_a und σ_s spektrale Größen sind, lassen sich auch verschiedene Diffusionsprofile für verschiedene Wellenlängen berechnen. Zwischen den einzelnen Profilen gibt es aber für Schnee keine nennenswerten Unterschiede und so zeigt Abbildung 5 nur das Profil für Blau (470nm). Auf die Diffusionstheorie und zugehörige Lösungen wie die Annäherung durch isotrope Dipole wird ab Abschnitt 4.2.3 eingegangen.

Die Lichtausbreitung, die die Diffusionsprofile beschreiben, geschieht radial um den Eintrittspunkt herum. Das bedeutet, dass das Profil an Stelle r Licht von einem Kreis mit einem Umfang proportional zu r darstellt. Eine Gewichtung mit r hat die gute Eigenschaft, dass die Fläche unter der Kurve proportional zur diffus remittierten Strahlung von weißem Licht ist. Damit können Fehler bei einer Approximation der Diffusionsprofile besser beurteilt werden [21]. Abbildung 6 stellt diese Gewichtung dar.



Abbildung 5: Das Diffusionsprofil für 470nm von Schnee mit den Eigenschaften der Beispiele zuvor und σ_t berechnet nach Gl. (3.5). Die anderen Wellenlängen verlaufen bis auf minimale Abweichungen genauso.



Abbildung 6: Das Diffusionsprofil aus Abb. 5 gewichtet nach dem Radius r.

3.2.2 Optische Dicke

Die meisten Betrachtungen in dieser Arbeit beziehen sich auf eine dickere Schneedecke. Das heißt, Schnee wird da als halbunendliches Medium betrachtet. Makroskopisch betrachtet, sind die optischen Eigenschaften von Schnee und Eis in den meisten Fällen über größere Tiefen hinweg homogen [5]. Darauf aufbauend kann die *optische Dicke* τ definiert werden:

$$\tau = (\sigma_{a} + \sigma_{s})z = \sigma_{t}z = \frac{3WC_{ext}}{4r\rho_{i}} = \frac{3\rho z C_{ext}}{4r\rho_{i}}$$

Der verwendete Schwächungskoeffizient σ_t muss unabhängig von der tatsächlichen Tiefe sein. Praktisch bedeutet dies, dass eine Schneeschicht makroskopisch homogen sein muss; dass dieselben optischen Parameter sie wesentlich größer als 1cm beschreiben [12]. Das bedeutet, dass die asymptotische Berechnung durch Gleichung (3.4) nicht ausreicht und (3.5) verwendet werden muss. Wie die Definition von τ zeigt, bedeutet
aber auch eine größere Korngröße eine höhere optische Dichte. Diese Tatsache ist erst für Wellenlängen ab einer Größe von $\lambda \approx 1 \mu m$ nicht mehr von Bedeutung [84]. Ab da ist es sehr unwahrscheinlich, noch auf Effekte endlicher Schichten zu stoßen. Im Bereich des sichtbaren Lichts jedoch, gilt es dies beim Messen von Schneeparametern, aber auch bei der Bildberechnung, zu beachten. Warren und Wiscombe [84] legen eine Tiefe fest, in der eine Schneeschicht als *effektiv* halbunendlich gilt. Das ist die Tiefe, an der das Albedo aller Wellenlängen maximal eine einprozentige Abweichung von dem der tatsächlichen halbunendlichen Tiefe besitzt. In Tabelle 5 sind drei typische Beispiele dargestellt. Die Tiefe ist als Wasseräquivalent angegeben, also der Wassertiefe die entstünde, würde man den Schnee schmelzen.

d (mm)	W _{es} (cm)	BspSchneetyp, ρ (kg · m ⁻³)
0.1	2	20 Lockerer Neuschnee, $\rho = 100$: $z_{eff} = 20$ cm
0.4	8	Feinkörniger Altschnee, $\rho = 400$: $z_{eff} = 20$ cm
2	20	Alter schmelzender S. $\rho = 400$: $z_{eff} = 50$ cm

Tabelle 5: Die Mindesttiefe W_{es} verschiedener Schneetypen um als effektiv halbunendlich gelten zu können, nach [84] und Beispiele.

3.2.3 Phasenfunktion

Für die richtungsabhängige Beschreibung von Streuvorgängen ist die in Abschnitt 1.2.6 eingeführte Phasenfunktion und der daraus hervorgehende Anisotropiefaktor g von großer Bedeutung. Größere (kugelförmige) Teilchen, wie sie bei Schnee vorkommen, haben deutlich komplexere Streumuster. Mit Hilfe der LORENZ-MIE-Theorie lassen sich diese Muster auf Basis des Brechungsindex, der mittleren Korngröße und einer Größenverteilung näherungsweise berechnen. Barkstrom und Querfeld [6] fanden auf diesem Wege eine Phasenfunktion für Schnee, die mit einer Einfach-Streu-Albedo von $\Lambda = 0,996$ zu guter Übereinstimmung zwischen gemessener und berechneter Reflektanz führte. Erstaunlicherweise wurde dabei ein Brechungsindex von 1,20 bei einer Korngröße von 0.6µm und eine Größenverteilung mit Modal-Durchmesser von 0, 245µm zu Grunde gelegt. Van de Hulst [82] wertet diese Übereinstimmung mit den eigentlichen Parametern für Schnee (n = 1, 31 und viel größerer Durchmesser) als rein zufällig. In [6] selbst werden nur die LEGENDRE-Entwicklungskoeffizienten angegeben; Tabelle 6 stellt diese dar.

Die Verwendung der eben dargestellten Phasenfunktion führt nach [6] und [82] zu besseren Ergebnissen als isotrope Streuung oder auch die HENYEY-GREENSTEIN-Funktion. Ihr Anisotropiefaktor beträgt g = 0.506.

Bohren und Barkstromn [12] berechneten, dass eintreffende Strahlung zu folgenden Anteilen verschieden gestreut wird: 3.2% werden extern an einem Eisteilchen reflektiert, 88.7% direkt transmittiert und 8.3% werden nach internen Reflexionen transmittiert. Das passt gut zu der Form der

L	L. Koeffizient				
0	1.00000	e	00		
1	1.51845	e	00		
2	1.01998	e	00		
3	4.24671	e	-01		
4	1.10795	e	-01		
5	1.78429	e	-02		
6	1.91907	e	-03		
7	1.48092	e	-04		
8	8.62257	e	-06		

Tabelle 6: Die LEGENDRE-Entwicklungskoeffizienten für die Phasenfunktion von Schnee, nach [6].



Abbildung 7: Phasenfunktion aus [6] im Vergleich mit der Henyey-Greenstein-Phasenfunktion (beide mit g = 0.5)

Phasenfunktion, die stark vorwärtsstreuend ist. Die Annahme, externe Reflexion an Eisteilchen sei die Ursache für das Streuverhalten in Schnee würde somit einen signifikanten Fehler mit sich bringen.

Wie Abbildung 7 zeigt, sind die Unterschiede zwischen beiden Funktionen recht gering. Für die Verwendung in der Computergrafik sind ist die Wahl der Phasenfunktion somit in diesem Fall nicht für das Ergebnis ausschlaggebend. Die Henyey-Greensteinfunktion lässt sich jedoch schneller berechnen und lässt sich sich einfach zum Importance-Sampling verwenden.

Zur Annäherung der Schneeteilchen wird hier auf kugelförmige Teilchen zurückgegriffen. Dies hat Auswirkungen auf die Form der Phasenfunktion. Geht man davon aus, dass das durchschnittliche Volumen eines Eisteilchens und die Teilchendichte unverändert bleiben, lässt sich das Verhältnis M der mittleren freien Weglängen folgendermaßen ausdrücken [48]:

$$M = \frac{1 - g_n}{1 - g_s}$$

Dabei stehen g_n und g_s für den Anisotropiefaktor von nicht-kugelförmigen respektive kugelförmigen Teilchen. Kokhanovsky und Zege gehen von $g_n \approx 0.5$ für fraktale Teichen und von $g_s \approx 0.78$ (berechnet mittels LORENZ-MIE-Theorie) für kugelförmige Teichen aus. Damit ist M = 2.27, was bedeutet, dass die mittlere freie Weglänge in Medien bestehend aus fraktalen Teilchen weniger als halb so lang ist wie in einem vergleichbaren Medium aus kugelförmigen Teilchen. Um Reflektanzwerte zu erhalten, die der Realität entsprechen, sollten also kleinere Korngrößen angenommen werden. In [48] wird ein Faktor von 0.625 empfohlen.

3.2.4 Brechungsindex

Wie in Abschnitt 1.2.9 schon angedeutet, ist der Brechungsindex von Schnee abhängig von der Wellenlänge. In Abbildung 8 ist der Brechungsindex von Eis und Wasser jeweils real und komplex dargestellt. Im Bereich des für den Menschen sichtbaren Lichts⁵, fällt der reale Brechungsindex von circa 1,325 auf 1,30 ab. Der komplexe Brechungsindex ist sehr klein und steigt hauptsächlich an.



Abbildung 8: Realer und komplexer Brechungsindex von Eis bei -7 °C und Wasser bei 23 °C. Daten aus [87], [25] und [57].

Die messtechnische Bestimmung des Absorptionsgrad und dessen Wellenlängenabhängigkeit war nicht ohne weiteres möglich. Bedingt durch seinen kleinen Betrag im Bereich des sichtbaren Lichts war es notwendig, Eisblöcke mit einer Länge von 2,8 m wachsen zu lassen. Grenfell und Perovich konnten 1981 [32] so die Absorptionsgrade von reinem, blasenfreiem Eis zwischen 400 und 1400 nm Wellenlänge bestimmen. Der Bereich von 250 bis 400 nm wurde 1991 von Perovich und Govoni [65] auf ähnliche Weise mit einem leicht größeren Eisblock abgedeckt.

Geht man von dem Übergang eines Lichtbündels von Luft in Schnee aus, ist der relative Brechungsindex η ungefähr 1,31. Folglich lässt sich nach Gleichung (1.6) recht einfach der diffuse FRESNELSche Reflexionsgrad F_{dr} ausrechnen: F_{dr} \simeq 0.4543. Dass der Brechungsindex im sichtbaren Bereich als konstant angenommen werden kann, wird auch durch Bohren und Barkstrom bestätigt [12].

⁵ Etwa 380 bin 780 nm bzw. 789 bis 385 THz

3.2.5 Albedo

Davon ausgehend, dass eine Oberfläche kein Licht emittiert, stellt der Quotient von reflektierter zu einfallender Lichtmenge die Albedo dar. Sie ist ein dimensions- und einheitenloses Maß für das Rückstrahlvermögen sichtbaren sowie infraroten Lichts einer Oberfläche und liegt zwischen o und 1. Dabei stellt eine Albedo von o einen perfekten Absorber dar, der alle ankommende Energie absorbiert. Eine Albedo von 1 ist entsprechend ein perfekter Reflektor—alle ankommende Energie wird reflektiert. Nach McEvoy et al. [4] und Wiscombe et al. [87] lässt sich Schnee und anderen Oberflächenarten die in Abbildung 9 dargestellten Albedos zuordnen.



Abbildung 9: Die Albedos von Schnee und anderen Oberflächenarten.

Schnee und Eis haben im Allgemeinen eine recht hohe Albedo. Schneebedecktes Eis remittiert, streut oder reflektiert sogar ganze 90% des einfallenden sichtbaren und infraroten Lichts. Dementsprechend gering ist die Absorption der einfallenden Sonnenenergie. Diese Eigenschaft begründet auch die Eis-Albedo-Rückkopplung und damit den großen Einfluss der Kryosphäre auf das Klima. Auch für die computergrafische Visualisierung mittels Vielfachstreuung ist dieser Aspekt relevant. Schließlich gibt die Albedo an wie viel Licht absorbiert und wie viel gestreut wird, Einfach- und Vielfachstreuung sind dabei aufsummiert. Somit beschreibt die Albedo nicht vollständig wie sich die Streuung eines Materials darstellt. Vielmehr könnte man sie als erste Annäherung einer BRDF verstehen. Zu einer vollständigen BRDF wird die Albedo durch das Bestimmen ihrer Winkelabhängigkeit bzgl. Licht und Betrachter. Häufig wird eine BRDF R zur einfacheren Handhabung mit der Albedo normalisiert. Das Ergebnis ist die anisotrope Reflektanzfunktion: $f = \pi \mathbf{R}/\mathbf{a}$.

Unter diffus einfallendem Licht ist die Albedo unabhängig von der Dichte und proportional zur Wurzel der Korngröße [12]. Dies ergaben die sehr präzise ausgeführten Messungen von Bohren und Barkstrom 1974. Wiscombe und Warren fassten 1982 die bis dahin dokumentierten Messungen zusammen [84]. Sie bestätigten ebenfalls Messungen die eine Zenitwinkelabhängigkeit der Albedo feststellen. Mit dem Zenitwinkel θ wächst ebenfalls die Albedo in allen Wellenlängen. Da diese Veränderung im sichtbaren Bereich lediglich wenige Prozent betrifft, ist sie für den Bereich der Computergrafik vernachlässigbar.

Bohren [10] beruft sich auf van de Hulst [81] indem er die Albedo ā von Schnee unter diffuser Beleuchtung folgendermaßen annähert:

$$a_d = 1 - 5.96 \sqrt{\sigma_{a,Eis}} d.$$
 (3.8)

Dabei stellt d den Durchmesser eines Eiskörnchens dar. Für Schnee mit einer Korngröße von 0.3 mm, einer Dichte von $430\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ sowie den Absorptionskoeffizienten von Grenfell und Perovich (Abbildung 4) ist die Albodo in Darstellung 10 zu sehen. Die errechneten Werte sind gut mit Liljequistis Messungen in der Antartis [51] vereinbar [10]. Die Absorptionslänge $\frac{1}{\sigma_{\alpha,\text{Eis}}}$ von Eis bewegt sich in der Größenordnung von Metern und der Durchmesser der Eisteilchen ist im Millimeterbereich. Daher ist das Produkt σ_{α} d in Gleichung (3.8) sehr klein ($10^{-4}-10^{-5}$ für sichtbare Wellenlängen und d ~ 1mm) und damit die Albedo von (vor allem feinkörnigem) Schnee hoch [10].



Abbildung 10: Albedo a_d von Schnee mit der Korngröße 0.3 mm, einer Dichte von 430kg · m⁻³ und den Absorptionskoeffizienten aus Abbildung 4. Nach [10]

Wie schon in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, gelten Gleichungen (3.2) und (1.4). Teilt man erstere durch letztere Gleichung, erhält man eine Annäherung an die Einfach-Streu-Albedo eines Eisteilchens mit Durchmesser d [10]:

$$\Lambda = \frac{C_{sca}}{C_{ext}} = 1 - \frac{C_{abs}}{C_{ext}} = 1 - 0.84\sigma_{a,Eis}d$$

Die Gleichung beschreibt den Anteil der Streuung an der gesamten Abschwächung. Der Ausdruck $1 - \Lambda$, die Einfachstreu-Coalbedo, ist damit für realistische Schneedecken $\ll 1$. Nach Bohren [10] ist dies in Übereinstimmung mit gemachten Messungen.

Der Anteil γ von diffuser Albedo an der Gesamtalbedo (siehe Abschnitt 1.2.8) kann wird in natürlichen Umgebungen durch der Wolkenbedeckung beeinflusst [87]. Wie Wiscome und Warren weiter schreiben, wandeln Wolken direkte Strahlung in diffuse Strahlung um. Das hat je nach Sonnenstand unterschiedliche Folgen. Bei niedrigem Sonnenstand ($\theta_i = 80^\circ$) sinkt dadurch der effektive Polarwinkel. Mit steigendem Bedeckungsgrad vermindert sich dann der effektiven Polarwinkel weiter und damit auch die Albedo. Steht die Sonne hoch am Himmel ist der Effekt genau umgekehrt. Für den sichtbaren Bereich ist der Unterschied beider Albedos aber so gering, dass dies hier vernachlässigt werden kann.

3.2.6 Weitere Eigenschaften

Bei verschiedenen Vielfachstreuungsbetrachtungen (z.B. bei Jensen [45]) wird mehr der *reduzierter Streuungskoeffizient* σ'_s statt der Streuungskoeffizient σ_s verwendet. In seine Berechnung fließen σ_s sowie der mittlere Cosinus des Streuwinkels g ein. Damit wird ein anisotropes Streumuster skaliert, so dass das Ergebnis als isotrope Streuung aufgefasst werden kann:

$$\sigma'_{s} = \sigma_{s}(1 - g) \tag{3.9}$$

Jensen [45] gibt σ'_s für verschiedene Medien an. Tabelle 7 stellt σ'_s für Schnee in der Einheit $\frac{1}{mm}$ dar um einfacher einen Vergleich zu ermöglichen.

Wellenlänge	σ_t nach (3.5)	σ_{s}	σ'_{s}	
0.400	2.1481	2.1481	0.3222	
0.450	2.1482	2.1481	0.3222	
0.500	2.1481	2.1481	0.3222	
0.550	2.1481	2.1481	0.3222	
0.600	2.1480	2.1480	0.3222	
0.650	2.1478	2.1477	0.3221	
0.700	2.1474	2.1472	0.3220	

Tabelle 7: Schwächungskoeffizienten für Beispiel aus Tabelle 4 sowie darauf aufbauend Streuungskoeffizient σ_s und reduzierter Streuungskoeffizient σ'_s mit g = 0.874. Jeweils in $\frac{1}{mm}$.

Messbare Größen stellen oft einen Referenzpunkt und eine Kontrollmöglichkeit für Modelle dar. Nachdem in Kapitel ₃ auf bisherige Bemühungen um wissenschaftlich belastbare Zahlen eingegangen wurde, soll dieses Kapitel verschiedene Modelle zur Beschreibung physikalischer Eigenschaften von Schnee genauer untersuchen. Die am passendsten erscheinenden Herangehensweisen wurden implementiert und können somit als Ausgangspunkt für weitere Überlegungen dienen. Auch bieten sie somit die Möglichkeit Vergleiche untereinander anzustellen.

Grundsätzlich kann es bei der Reaktion auf elektromagnetische Strahlung zu Nahfeldeffekten kommen. Bei einem geringen Abstand zwischen Streukörpern können beispielsweise Interferenzen auftreten. Licht eines Bündels könnte benachbarte Teilchen gleichsam treffen und gestreut werden. Sofern der Kern-zu-Kern-Abstand jedoch groß im Vergleich zur Wellenlänge ist, können diese Effekte vernachlässigt werden. Für Schnee ist dies nach Warren [84] und Bohren [13] im gesamten solaren Spektrum, und somit auch im sichtbaren Licht, der Fall. Erst ab einer Wellenlänge von $\lambda > 1$ cm spielen Nahfeldeffekte für Schnee mit Sicherheit eine Rolle. Der Übergang ist fließend, aber bei $\lambda < 1\mu$ m ist mit Sicherheit der Fernfeldbereich erreicht [84].

Nimmt man eine Schneekorngröße d von $0,5 \cdot 10^{-3}$ m und eine Wellenlänge λ von $500 \cdot 10^{-9}$ m an, wird klar, dass d circa 1000 mal größer als λ ist. Damit ist die Oberfläche aus Sicht des Lichts ziemlich rau.

Grundsätzlich kann es bei der Wechselwirkung zwischen Licht und einem Medium zu Einfachstreuung S⁽¹⁾ sowie Vielfachstreuung S_d kommen. Wie in Abschnitt 1.2.3 dargestellt, kommt es bei der Einfachstreuung zu nur einem Streuereignis. Im Gegensatz zur Vielfachstreuung kann bei Gültigkeit dieser Annahme die Strahlungstransportgleichung exakt gelöst werden. Ist allein Einfachstreuung in den Streuvorgang involviert, gilt das BOUGUEN-BEER-LAMBERTSche Gesetz für die Abnahme des Strahlenflusses. Für mehrfache Streuvorgänge müssen Annäherungen genutzt werden. Da aber fast immer beide Komponenten involviert sind, ist die für die BSSRDF S die Summe der Beiträge interessant:

 $S = S^{(1)} + S_d$

Für Schnee sind ebenfalls beide Teile, aber vor allem der Vielfachstreuungsanteil S_d wichtig [82] [10]. Das in der Computergrafik am häufigsten genutzte Vielfachstreuungsmodell ist die Diffusionstheorie. Auf sie wird in Abschnitt 4.2.2 eingegangen, jedoch kann folgendes vorweggenommen werden: Sind die Voraussetzungen für ihre Verwendung gegeben (wie bei Schnee der Fall), ist $l_d = 1/\sigma_{tr}$ eine bessere Beschreibung der mittleren Weglänge [45]. Damit lässt sich ein Vergleich der Einflussregion von Einfach- zu Vielfachstreuung ziehen. Ist die mittlere freie Weglänge der Einfachstreuung gegeben durch $l_s = 1/\sigma'_t$, kann eine relative Weglänge berechnet werden:

$$l_{rel} = \frac{l_d}{l_s} = \frac{\sigma'_t}{\sigma_{tr}} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\Lambda)(1-g\Lambda)}}.$$

Es besteht also allein eine Abhängigkeit von der Einfach-Streu-Albedo Λ und dem Anisotropiefaktor g. Für Schnee typische Werte bewegen sind um $\Lambda = 0.9999$ und g = 0.85. Damit ergibt sich eine relative Weglänge von $l_{rel} \approx 149$. Vielfach gestreute Strahlung legt damit durch-schnittlich einen 149 mal so langen Weg in Schnee zurück, also einfach gestreute. Damit ist die Einfachstreuung in Schnee deutlich lokaleres Phänomen als die Vielfachstreuung [45]. Das macht vor allem die Wichtigkeit der Vielfachstreuung in Schnee deutlich. Den Einfluss der Einfachstreuung wurde ebenfalls durch Jensen durch eine Monte-Carlo-Simulation betrachtet [45]. Mit einer so hohen Einfach-Streu-Albedo und einem Anisotropiefaktor $g \leq 0.5$, ist die Vielfachstreuung für mindestens. 95% der Ausstrahlung M verantwortlich.

4.1 EINFACHSTREUUNG

Tritt nur einmalig eine Wechselwirkung zwischen Licht und Medium auf, spricht man von Einfachstreuung. Ihr Anteil an der gesamten Rückstrahlung hängt vom Streuungsverhalten des Materials ab. Schnee ist stark vorwärtsstreuend, entsprechend ist der Anteil der Einfachstreuung gegenüber der Vielfachstreuung bei Schnee geringer. Die Einfach-Streu-Albedo Λ von Schnee ist für den sichtbaren Bereich sehr hoch ($\Lambda \approx$ 1). Damit reicht die Einfachstreuung für die Lösung der Strahlungstransportgleichung bei Schnee allein nicht aus. Nach Tuchin [78] ist dann die Einfachstreuung nicht mal für $\tau \ll 1$ (bei Schnee mind. 21cm) ausreichend.

4.1.1 Analytische Lösung

Die einmalige Wechselwirkung ist nur eine Modellannahme. So stellte Chandrasekhar [16] eine analytische Lösung der Strahlungstransportgleichung unter dieser Annahme dar. Hanrahan und Krüger [33] machten deutlich, dass diese Lösung gleich der von Blinn [9] ist, aber auf einem völlig anderen Weg entstanden sei. Blinns Arbeit war die bis dahin einzige in der sich eine Berücksichtigung von Vielfachstreuung fand.

Die Phasenfunktion für die Einfachstreuung ist wellenlängenabhängig [84].

Die durch Einfachstreuung verursachte ausgehende Strahldichte $L_o^{(1)}$ kann mit Hilfe der eingehenden Strahldichte ermittelt werden. Diese

wird über den Weg vom Streuereignis bis zum Austritt aus dem Medium integriert [45]:

$$L_{o}^{(1)}(\mathbf{x}_{o},\hat{\boldsymbol{\omega}}_{o}) = \sigma_{s}(\mathbf{x}_{o}) \int_{2\pi} \operatorname{Fp}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i}' \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}_{o}') \int_{0}^{\infty} e^{-\sigma_{tc}s} L_{i}(\mathbf{x}_{i},\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i}) \, ds \, d\hat{\boldsymbol{\omega}}_{i}.$$

Jensen et al. [45] beschreibt darauf aufbauend die Einfachstreuung mittels einer entsprechenden BSSRDF $S^{(1)}$:

$$L_{o}^{(1)}(x_{o},\hat{\omega}_{o}) = \int_{A} \int_{2\pi} S^{(1)}(x_{i},\hat{\omega}_{i},x_{o},\hat{\omega}_{o}) L_{i}(x_{i},\hat{\omega}_{i})(\vec{n}\cdot\hat{\omega}_{i}) d\omega_{i} dA$$

Dabei ist $F = F_t(\eta, \hat{\omega}_o)F_t(\eta, \hat{\omega}_i)$ das Produkt zweier Fresnel-Transmissionsterme und $\hat{\omega}'_i$ und $\hat{\omega}'_o$ die gebrochene Einfalls- und Ausfallsrichtung [45]. Der kombinierte Schwächungskoeffizient σ_{tc} wird mittels eines Geometriefaktors G und der σ_t von Eintritts- wie Austrittsort definiert: $\sigma_{tc} = \sigma_t(x_o) + G\sigma_t(x_i)$. Für eine plane Oberfläche ist G definiert als

$$G = \frac{|\vec{n}_i \cdot \hat{\omega}'_o|}{|\vec{n}_i \cdot \hat{\omega}'_i|}.$$

Zwischen der ersten und der zweiten Gleichung zur Berechnung der ausgehenden Strahldichte durch Einfachstreuung gibt es einen wesentlichen Unterschied. In ersterer nehmen nur die an der Brechung und Streuung beteiligten Lichtbündel Teil. Wohingegen in der zweiten über alle einfallenden und ausgehenden Lichtbündel integriert wird. Um an dieser Stelle nicht "versehentlich" Vielfachstreuung einzubeziehen, bedarf es einer Art Filter. Diese wird mittels eines DIRAC-Impulses in der BSSRDF realisiert [45].

Die formale Beschreibung von $L_o^{(1)}$ stellt sich praktisch deutlich einfacher dar. S⁽¹⁾ ist schon implizit gegeben und die Strahldichte ist somit nach [45]

$$L_{o}^{(1)}(x_{o},\hat{\omega}_{o}) = \frac{\sigma_{s}(x_{o})Fp(\hat{\omega}_{i}'\cdot\hat{\omega}_{o}')}{\sigma_{tc}}e^{-s_{i}'\sigma_{t}(x_{i})}e^{-s_{o}'\sigma_{t}(x_{o})}L_{i}(x_{i},\hat{\omega}_{i}).$$
(4.1)

Der Schwächungskoeffizient ist hier abhängig von der Position. Das ist nicht notwendig aber ermöglicht kleine lokale Veränderungen. Im Bezug auf Schnee kann dies von Vorteil sein, schließlich variiert die Oberfläche recht stark. Im weiteren stellt s'o eine Stichprobe möglicher Entfernungen entlang des Schattenstrahls und s' die Entfernung entlang des reflektierten Strahls dar:

$$s'_{o} = -\frac{\log \xi}{\sigma_{t}(x_{o})} = -\log \xi \cdot l_{s}(x_{o}), \qquad (4.2)$$

$$s'_{i} = s_{i} \frac{|\hat{\omega}_{i} \cdot \vec{n}_{i}|}{\sqrt{1 - (\frac{1}{\eta})^{2} \cdot (1 - |\hat{\omega}_{i} \cdot \vec{n}(x_{i})|^{2})}}.$$
(4.3)

Dabei stellt ξ eine gleichverteilte Zufallszahl im Intervall]0,1] dar. Die Integration über alle Weglängen basiert somit auch auf den Monte-Carlo-Technik. s'_i ist eine Annäherung an die Entfernung die einfallende Lichtbündel im Material zurücklegen und auch ein Kompromiss, schließlich ist dies stark von der Geometrie abhängig. Die Berechnung von s'_i für beliebige Geometrie ist aufwändig, da der Oberflächenpunkt gefunden werden muss, an dem die ursprüngliche Brechung stattfand [45]. Praktisch findet sich aber eine gute Annäherung wenn man davon ausgeht, dass keine Brechung stattfand. Dies impliziert die Annahme einer im Vergleich zu l_s weit entfernten Lichtquelle. Gleichung (4.3) stellt dann die mittels SNELLS Gesetz angenäherte tatsächliche Entfernung dar.

Gleichung (4.1) beschreibt die Abschwächung des eintreffenden Lichtbündels. Die erste Abschwächung findet auf dem Weg s' vom Eindringen in das Material bis zum Streuereignis statt; die zweite auf dem Weg vom Streuereignis heraus aus dem Medium. Diese werden durch die beiden exponentiellen Terme repräsentiert. Mittels dem Bruch zu Beginn der Gleichung wird das Richtungsverhalten der Streuung bestimmt, da Fresnelterm sowie die Phasenfunktion enthalten sind [49].

Um die Einfachstreuung zu Beschreiben bedarf es nicht zwingend einer BSSRDF. Nach Warren [84] ist die BRDF *f* von Schnee für Wellenlängen λ mit 0.44 $\leq \lambda \leq$ 0.96µm unabhängig von ebendieser. Das hat für die Messung der R den Vorteil spektral integrierende Messgeräte nutzen zu können.

4.1.2 MIE-Streuung

Die Schneeoberfläche kann durch einzelne kugelförmige Teilchen modelliert werden. Ihr Absorptions- und Streuungsverhalten kann durch MIE-Streuung beschrieben werden, sofern die Teilchengröße in etwa der Wellenlänge entspricht. Schneeteilchen bewegen sich mit 20–1500 µm gegenüber Wellenlängen des sichtbaren Lichts von etwa 0.4–1 µm noch in einer ähnlichen Region. Als Modell für die Einfachstreuung von Schnee wird die MIE-Streuung in den Betrachtungen von Wiscombe und Warren [87] verwendet. Jedoch ist die MIE-Streuung, vor allem für größere Schneeteilchen, sehr zeitaufwändig zu berechnen. Und auch ein von Wiscombe optimiertes Verfahren reduziert dieses Problem nicht ausreichend [84] um das Verfahren direkt mit vielen Teilchen zu benutzen.

Beträgt das Größenverhältnis zwischen dem Teilchenumfang und der Wellenlänge mindestens das hundertfache [84], kann die von Nussenzveig und Wiscombe dargestellte asymptotische Entwicklung genutzt werden. Diese ist deutlich schneller zu berechnen und führt zu einer ausreichenden Genauigkeit [62]. Dies ist bei Schnee nicht untypisch und somit anwendbar. Ist das Verhältnis geringer, wird der Fehler größer, bewegt sich aber für Schnee noch nicht in problematischen Bereichen. Setzt man den komplexen Brechungsindex als invariant voraus, kann auch die darauf aufbauende Summendarstellung durch Box et al. [15] benutzt werden. Gerade im sichtbaren Bereich ist die Absorption so gering, dass diese Annahme kein Problem für ein Einfachstreuungsmodell ist.

Dass die MIE-Theorie keine Nahfeldeffekte darstellen kann, ist für die Streuung in Schnee ebenfalls kein Problem. Gemessene Reflektanzverteilungen, häufig BRDFs, von Schnee zeigen üblicherweise eine kleine Spitze in die Richtung der Rückwärtsstreuung [39]. Berechnungen auf Basis der MIE-Streuung und kugelförmigen Eisteilchen können dies aber nicht beschreiben.

Zur Annäherung des Steumusters der LORENZ-MIE-Streuung wird hier die HENYEY-GREENSTEIN-Funktion genutzt. Frisvad et al. [29] erweiterten die Theorie um auch absorbierende Medien berechnen zu können. Da viele Medien eine Menge von Einschlüssen besitzen welche die Streuung aber vor allem auch die Absorption beeinflussen, können so deutlich mehr Medien dargestellt werden. So wurden in [29] auch verschiedene Arten von Eis—auch eine Schneekonfiguration—untersucht welche sich z. B. durch den Anteil an Algen oder Salz unterschieden. Mit der Beschreibung der Volumenanteile und Größenverteilung können so Streu- und Absorptionskoeffizienten auf Basis ihrer erweiterten LORENZ-MIE-Theorie errechnet werden. Die sehr realistisch wirkenden Ergebnisbilder und das Fehlen der Parameterangaben motivierten den Versuch die Berechnung für Schneeparameter durchzuführen.

4.2 VIELFACHSTREUUNG

Wie in Abschnitt 1.2.9 erwähnt, ist für die Beschreibung transluzenter Materialien vor allem die Vielfachstreuung von Bedeutung. Analytische Lösungen sind nicht bekannt [72], aber einige gute Annäherungen sind gefunden wurden. In der Computergrafik bauen viele Modelle auf der von Jensen eingeführten Dipolannäherung auf. Wohingegen im klimatologischen Umfeld eher auf genauere und aufwändigere Verfahren wie die MIE-Streuung zurückgegriffen wird. Peterson et al. [53] zeigten mittels verschiedener Monte-Carlo-Simulationen, dass sich Licht in Schnee ab Tiefen von mind 0.7cm diffus verteilt.

4.2.1 Zweistrom-Strahlungstransfer und δ-Eddington-Annäherung

Der Zweistrom-Strahlungstransfer ist eine Annäherung an die Strahlungstransportgleichung. Anwendung findet er zum Beispiel in einigen Modellen zur Wettervorhersage. Es stellt die einfachste Approximation dar um Effekte der Lichtausbreitung zu beschreiben, die über Einfachstreuung hinausgehen. Der Zweistrom-Transfer ist eine Art des Multistrom-Transfers. Beispielsweise wird auch noch der Vierstrom-Transfer oder der Siebenstrom-Transfer verwendet. Letzteres Modell ist das einfachste Multistrommodell was gestreute Strahlung drei-dimensional repräsentieren kann. Im Zweistrommodell breitet sich Licht in nur genau zwei Richtungen, die beiden Ströme bzw. Strahlungsflüsse, aus: Nach oben und nach unten. Damit kann auch eine mögliche Streuung nur entlang dieser Richtungen stattfinden. Die dies beschreibenden Parameter können aber zwischen beiden Richtungen variieren.

Das hat zur Folge, dass die Berechnungen relativ einfach ausfallen. Der Nachteil ist die Wellenlängenabhängigkeit der Vorgehensweise; außerhalb eines Zielbereichs (oft sichtbares Licht) sind hierauf aufbauende Modelle meist nicht allgemein anwendbar. Für die Betrachtung aus computergrafischer Sicht stellt dies aber noch nicht zwingend eine Einschränkung dar.

Um die Lichtausbreitung in Schnee zu beschreiben, wurde die Zweistrom-Approximation schon sehr lange bemüht. Die Streurichtungsbeschränkung des Zweistrom-Strahlungstransfers stellt für Schnee kein großes Problem dar, da er ohnehin hauptsächlich vorwärtsstreuend ist. Das Modell von Dunkle und Bevans abstrahierte 1956 von einzelnen Schneekörnern auf Basis eines Zweistrom-Strahlungstransfer-Modell mit zwei Eingabeparametern [24]. Diese Parameter können grob mit einer effektiven Korngröße und dem Absorptionskoeffizienten in Verbindung gebracht werden [84]. Sie stellten Schnee als mehrere Eisschichten dar. Für diese wurde die FRESNEL-Reflexionen bei direktem Licht von oben sowie dessen Absorption berechnet. Mittels der Zweistrom-Methode von Schuster und diesen beiden Koeffizienten konnten Aussagen über die Albedo getroffen werden. Die erhaltenen Werde sind im sichtbaren Bereich des Lichts eine gute Näherung der gemessenen Werte.

1979 wurde der Zweistrom-Strahlungstransfer auch von Choudhury und Chang zur Beschreibung der Lichtausbreitung in Schnee eingesetzt [17]. Eine Variante, die Eddington-Annäherung, kam ein Jahr später bei Wiscombe und Warren zum Einsatz [87].

Eisteilchen streuen Licht in einer Weise, dass ein großer Teil nur leicht abgelenkt wird. Damit ist des Streuungsverhalten von Schnee sehr asymmetrisch. Die Delta-Eddington-Annäherung ist ein Modell was sehr gut zu dieser Situation passt, da es auch mit extremen Asymmetrien gut umgehen kann [84]. Für die Berechnung der Strahlungsstärke ist sie ein genaues und effizientes Werkzeug. Außerdem kann mit ihr auf direkte wie auch diffuse Einstrahlung und jegliche Kombination der beiden eingegangen werden. Eine Möglichkeit die vorausgehende Annäherungen für die Vielfachstreuung nicht boten [84].

Die delta-Eddington Annäherung arbeitet auf einer künstlichen Schneeschicht, deren Eigenschaften aus den der eigentlichen Schneedecke berechnet werden. Dazu werden die optische Dicke τ , die Einfachstreu-Albedo Λ und der Anisotropiefaktor g transformiert:

$$\tau^* = (1 - \Lambda g^2)\tau, \quad \Lambda^* = \frac{(1 - g^2)\Lambda}{1 - g^2\Lambda}, \quad g^* = \frac{g}{1 + g}$$

Diese neu definierte Schneeschicht ist charakterisiert durch eine deutlich geringere Vorwärtsstreuung (g* < 0.5), mehr Absorption ($\Lambda^* < \Lambda$) aber auch eine geringere optische Dicke ($\tau^* < \tau$). Die neue optische Dicke ist im Bezug auf die Absorption unverändert, aber für die Streuung geringer [84]. Die delta-Eddington Annäherung wird auf diese Schneeschicht angewendet. Die algebraischen Details sind bei Wiscombe und Warren [84] nachzulesen. Darauf aufbauend lässt sich eine spektrale Beschreibung für die vom Polarwinkel θ abhängige Albedo a formulieren. Diese stellt das Integral einer BRDF über alle Reflexionswinkel dar und wird als spektrale direktional-hemisphärische Reflektanz (engl. spectral directional-hemispherical reflectance) bezeichnet. Integriert man a_s über alle Einfallswinkel, erhält man die diffuse Albedo a_d . Die Darstellung der spektralen Albedo durch die delta-Eddington-Annäherung ist von τ abhängig. Lässt man dieses gegen ∞ laufen, erhält man eine Beschreibung die für ein *halbunendliches* Medium gültig ist:

$$a_{s} = \frac{\Lambda^{*}}{1+P} \frac{1-b^{*}\xi\mu_{0}}{1+\xi\mu_{0}}$$
(4.4)

Für diese Formulierung sind weitere Definitionen notwendig:

$$a^* = 1 - \Lambda^* g^* \qquad \qquad \xi = \sqrt{3a^*(1 - \Lambda^*)}$$
$$b^* = \frac{g^*}{\Lambda^*} \qquad \qquad P = \frac{2\xi}{3a^*}$$
$$\mu_0 = \cos \theta$$

Die Annäherung an ∞ dauert umso länger, desto kleiner die Einfachstreu-Koalbedo 1 – Λ ist. Wiscombe und Warren nennen als Beispiele (a) $\tau = 7$ und (b) $\tau = 1000$. Für (a) ist 1 – $\Lambda = 0.1$ während für (b) 1 – $\Lambda = 10^{-5}$ gilt. Je geringer der Absorptionsanteil an der Schwächung, desto tiefer geht die Strahlung in das Medium hinein und desto größer die optische Dicke. Gerade im sichtbaren Bereich ist Fall (b) üblich. In Abschnitt 3.2.2 wurde bereits dargestellt, dass die optische Dicke gerade im sichtbaren Bereich eine wichtige Rolle spielt.

Insofern ist eine Berücksichtigung von optisch dünnen Schneeschichten relevant. Dafür muss die Reflektanz R_0 des darunter liegenden Mediums bekannt sein. Dozier et al. [39] geben aufbauend auf Gleichung (4.4) folgende Beschreibung für die Albedo bzw. Reflektanz der dünneren Schneeschicht an:

$$a_{s} = \frac{\Lambda^{*}(1 + \frac{g^{*}}{a^{*}}) - (\frac{\Lambda^{*}g^{*}}{a^{*}})(Q^{+} - Q^{-})}{Q^{+}(1 + P) - Q^{-}(1 - P)}$$
(4.5)

Die zusätzlichen Variablen sind:

$$\gamma = \frac{1 - R_0}{1 + R_0} \qquad \qquad Q^{\pm} = (\gamma \pm P) \cdot e^{\pm \xi \tau^*}$$

Grundsätzlich besteht für die Albedo der Schneedecke eine Abhängigkeit vom Polar- und vom Azimutwinkel des einfallenden Lichts. Im Bezug auf den Azimutwinkel ist diese allgemein sehr gering, wohingegen mit kleinerem τ die Abhängigkeit von θ größer wird. Im sichtbaren Bereich ist diese aber so gering $(1 - \Lambda = 10^{-4}, 10^{-5})$, dass die experimentelle Bestimmung schon sehr schwer fallen würde [87]. Daher können diese Abhängigkeiten für den sichtbaren Bereich vernachlässigt werden.

Warren und Wiscombe [84] leiteten weiterhin eine Formel zur Berechnung des diffusen Albedos a_d ab. Mittels einer Linearkombination $(a_{net} = Ra_d + (1 - R)a_s)$ können beide kombiniert werden. Da sich dieses aber im sichtbaren Bereich praktisch nicht von a_s unterscheidet, wird es für den Zweck der Computergrafik kaum von Bedeutung sein. Multipliziert man die Albedo mit der anisotropen Reflektanzfunktion f erhält man eine BRDF R (siehe Abschnitt 3.2.5). Beide hängen von der Einfallsrichtung (θ , ϑ) und der Betrachtungsrichtung (θ' , ϑ') ab. Warren [84] relativiert die Vermutung, dass f von der Wellenlänge abhängt. Diese liegt nahe, da die Phasenfunktion schließlich auch mit λ variiert. Zumindest ist wohl für 0.44 $\leq \lambda \leq 0.96\mu$ m und somit für den sichtbaren Bereich keine Abhängigkeit gegeben.

Für viele klimatologische Anwendungen, wie die Bilanzierung des Strahlungshaushalts, reicht es, eine BRDF mit gemitteltem Azimutwinkeleinfluss zu bestimmen [84]. Dazu wird die Albedo und eine azimutal gemittelte anisotrope Reflektanzfunktion \overline{f} verwendet:

$$\bar{f}(\theta, \theta') = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(\theta, \theta', \vartheta' - \vartheta) \, \mathrm{d}\vartheta'$$

Nach Messungen von Warren und Wiscombe [87] lässt sich \bar{f} annähern mit

$$\bar{f}(\mu_0, \mu') = \frac{3}{3-b}(1+b(\mu'-1))$$
(4.6)

und $b = 1.07\mu_0 - 0.84$. Die Polarwinkel gehen als Cosinus ein. Leider lässt sich aus Gleichung (4.6) nicht auf die vollständige BRDF schließen.

Für dieses Modell wurde die Vielfachstreuung nur zur Herleitung verwendet.

4.2.2 Die Diffusionsapproximation

Die Diffusionsapproximation erlaubt ebenfalls eine Annäherung an die Strahlungstransportgleichung und hat ihren Ursprung in der Medizin [45] und der Reaktorforschung [12]. Sie ist eine Form der Zweistromannäherung und ist somit äquivalent zu anderen Formen von dieser [84]. Bei einer Annäherung ist immer relevant unter welchen Voraussetzungen sie die Realität gut beschreibt. Die Annahme bei der Diffusionstheorie ist, dass im betrachteten Medium deutlich mehr Streuung als Absorption vorhanden ist [71]. Mit zunehmender Anzahl von Streuungsereignissen wird selbst trotz einem anisotropen Medium und einer anisotropen Lichtquelle die ausgehende Strahldichte annähernd isotrop. Diese annähend isotrope Strahldichte kann mit einer Diffusionsapproximation beschrieben werden. Sie ist ebenfalls eine partielle Differentialgleichung, aber deutlich einfacher zu lösen als die Strahlungstransportgleichung. Jensen [45] zeigte, dass die Diffusionsapproximation genutzt werden kann um die BSSRDF anzunähern. Weiterhin ist die Volumendichte, also das Verhältnis von dem durch Teilchen eingenommenen Volumen zum Gesamtvolumen des Mediums, für die Anwendbarkeit relevant. Ist diese deutlich größer als 1% führt die Diffusionsapproximation nach Ishimaru [38] zu relativ einfachen und guten Ergebnissen.

Tuchin [78] nennt weitere Voraussetzungen dafür, dass die Diffusionsannäherung als gute Annäherung funktioniert: Ein kleiner Anisotropiefaktor $g \leq 0.1$ und eine hohe Albedo $\bar{a} \rightarrow 1$ sind notwendig. Diese Beschränkung wird ausgedehnt auf g < 0.9 sofern sich die optische Dichte τ eines Mediums in der Größenordnung von 10–20 bewegt. Unabhängig davon ist die Diffusionstheorie aber *nicht* bei Lichtquellen nahe der Oberfläche anwendbar.

Für Schnee sind diese Voraussetzungen gegeben¹. Wie die Abschnitte 3.1 und 3.2 zeigen, ist die Streuung deutlich höher als die Absorption und der Eisanteil bewegt sich, je nach Dichte, oft in Regionen jenseits von 10%. Mit einer Tiefe von d \approx 2.1m hat Schnee eine optische Dicke von 10. Im Grunde setzt die Diffusionsapproximation für genaue Werte also diese Schneetiefe voraus. Für den Bereich der Computergrafik stellt das aber nur für deutlich dünnere Schichten ein Problem dar. Schnee von mehreren cm ist der gemachten Erfahrung nach unproblematisch.

Gidings und LaChapelle wendeten Diffusionsapproximation 1961 für die Albedoberechnung von Schnee an [31]. Ihr Modell war abhängig von einem Diffusions- und einem Absorptionskoeffizienten. Ersterer wurde als effektive Korngröße interpretiert, der Weg zwischen zwei Eis-Luft-Übergängen. Experimentell ermittelte Werte bestätigten diese Interpretation nicht, da der ermittelte Diffusionskoeffizient ungefähr das 20-fache des Kornradius betrug [84]. Bohren und Barkstrom [12] nutzen die Diffusionsapproximation zur Strahlungsfeldberechnung in abgeschlossenen Geometrien aus Schnee.

Viele Photonen durchstreifen über eine Vielzahl von Streuvorgängen "größere" Volumen und man kann eine *a priori* Annahme über die Form der Strahldichte L treffen [71]. Da die Annahme bei der Diffusionsapproximation eine gegenüber der Absorption dominierende Streuung ist, geht man auch von einer nahezu gleichmäßigen Winkelverteilung von L aus. Diese kann aber nicht konstant sein. Wäre sie dies, könnte es ebenfalls nur eine konstante (vektorielle) Bestrahlungsstärke geben. Damit gäbe es aber auch keinen Netto-Energietransport. Daher sollte die Strahldichte in Ausbreitungsrichtung etwas stärker als in die entgegen gesetzte Richtung sein. Ishimaru [38] stellte die diese Situation folgendermaßen dar:

$$L(x, \vec{\omega}) \simeq U(x) + c\vec{E}(x) \cdot \hat{\omega}$$
(4.7)

wobei c eine Konstante und \vec{E} die vektorielle Bestrahlungsstärke mit der Richtung $\hat{\omega}$ ist. Wie an Abschnitt 1.2.2.3 wird \vec{E} als

$$\vec{\mathsf{E}}(\mathsf{x}) = \int_{4\pi} \mathsf{L}(\mathsf{x}, \vec{\omega}) \hat{\omega} \, \mathrm{d}\omega = \vec{\underline{\mathsf{E}}}(\mathsf{x}) \cdot \hat{\omega}_{\mathsf{f}}$$

beschrieben. Außerdem stellt U die gemittelte skalare Bestrahlungsstärke dar:

$$U(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} L(\mathbf{x}, \vec{\omega}) \, d\omega = \frac{1}{4\pi} E_0(\mathbf{x}).$$

¹ Ebenfalls sind diese für viele Gewebearten erfüllt [71], was den Einsatz in der Medizin motiviert.



Abbildung 11: Die Diffusionsannäherung

Abbildung 11 stellt den Streuvorgang schematisch dar. Die Konstante c aus Gleichung (4.7) ist mit Hilfe folgendem Zusammenhang ersichtlich:

$$\underline{\vec{E}}(x) = \vec{E} \cdot \hat{\omega}_{f} = \int_{4\pi} L(x, \vec{\omega}) \cdot \hat{\omega} \cdot \hat{\omega}_{f} d\omega.$$
(4.8)

Setzt man Gleichung (4.7) in (4.8) ein, erhält man c = $\frac{3}{4\pi}$. Damit ergibt sich die Diffusionsannäherung für die Strahldichte L zu

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\vec{\omega}) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{E}_0(\mathbf{x}) + \frac{3}{4\pi} \vec{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\omega}. \tag{4.9}$$

Jensen et al. [45] und Ishimaru [38] merkten an, dass Gleichung (4.9) auch als die ersten beiden Glieder der TAYLORENtwicklung von L betrachtet werden kann. Auf dieser Gleichung kann nun die Diffusionsapproximation aufgebaut werden. Um die Auswirkungen der Näherung (4.9) auf die Strahlungstransportgleichung (siehe Abschnitt 1.2.7 mit Gleichung (1.9)) zu erfahren, wird erstere in zweitere eingesetzt. Anschließend wird die Winkelabhängigkeit aufgegeben indem über alle Richtungen integriert wird. Nach einigen wenigen Umformungen ist das Ergebnis:

$$\vec{\nabla} E_0(x) = -3\sigma'_t \vec{E}(x) + \vec{Q}_1(x).$$
 (4.10)

Es kam außerdem eine weitere Zusammenfassung zum Einsatz: σ'_t ist der reduzierte Schwächungskoeffizient und errechnet sich nach

$$\sigma'_t = \sigma'_s + \sigma_a$$
 mit $\sigma'_s = \sigma_s(1-g)$.

Der reduzierte Streukoeffizient σ'_s skaliert σ_s in eine isotrope Streusituation. Damit ist es möglich den Effekt einer Phasenfunktion mit starken Spitzen auch ohne explizite Auswertung derselbigen zu simulieren. Jensen und Buhler beschreiben diese Technik als Ähnlichkeit der Momente und sie erlaubt die Änderung der Streuparameter ohne das Strahlungsfeld merklich zu verändern. Damit kann häufig auf eine Auswertung der konkreten Phasenfunktion verzichtet werden. Wie auf Seite 14 dargestellt, handelt es sich bei \vec{Q}_1 um einen Quellterm erster Ordnung. Dieser verschwindet in dem Moment wo keine Lichtquellen existieren oder diese isotrop sind [45]. Ist das der Fall vereinfacht sich Gleichung (4.9) zu

$$\vec{\nabla} E_0(x) = -3\sigma'_t \vec{E}(x) = -\frac{\vec{E}(x)}{D}.$$
 (4.11)

Dabei ist die Diffusionskonstante oft als $D = \frac{1}{3(\sigma'_s + \sigma_a)} = \frac{1}{3\sigma'_t}$ angegeben. Jensen [45] merkte an, dass diese Gleichung sehr gut deutlich mache, dass es einen Nettoenergietransport (also eine von Null verschiedenen vektorielle Bestrahlungsstärke) von Regionen höherer Energiedichte (und somit hoher skalarer Bestrahlungsstärke) in Regionen niedrigerer gibt. Tuchin [78] empfahl eine leicht veränderte Konstante von $D = \frac{1}{3(\sigma'_s + c\sigma_a)}$. Für c gibt es Empfehlungen (0, $\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1$) von denen $\frac{1}{3}$ die besten Ergebnisse im Vergleich mit einer Monte-Carlo-Simulation liefert. Damit wäre die Form $D = \frac{1}{3\sigma'_s + \sigma_a}$ besser. In der Praxis ergeben sich aber nur bei relativ stark absorbierenden Medien mit $\frac{\sigma_a}{\sigma'_s} > 0.01$ Unterschiede. Für Schnee ist das kaum der Fall und es konnte kein wesentlicher Unterschied festgestellt werden. Der Grund dafür ist, dass σ_a sehr klein ist und eine Differenz um $2\sigma_a$ nicht sehr ins Gewicht fällt. Auch verwenden Barkstrom und Bohren [12] eine Definition die äquivalent zur von Jensen verwendeten ist.

Um schließlich zur eigentlichen Diffusionsapproximation zu gelangen, muss noch Gleichung (4.11) in Gleichung (1.10) eingesetzt werden. Damit lautet die Diffusionsgleichung

$$D\nabla^{2}E_{0} = \sigma_{a}E_{0} - Q_{0}(x) + 3D\vec{\nabla}\cdot\vec{Q}_{1}(x).$$
(4.12)

In der Computergrafik stellt diese Gleichung für einige Vielfachstreuungsmethoden die Grundlage dar. So bauten Jensen et al. [45] darauf auf und zeigten, dass die BSSRDF mittels Diffusionstheorie durch Gleichung (4.19) angenähert werden kann. Durch sie ist das meiste Licht in transluzenten Materialien repräsentiert. Jensens Annäherung und die Lösung mittels isotroper Dipolannäherung ist ebenfalls die Grundlage der Echtzeittechniken von Mertens et al. [56] und Shah et al. [72]. Die Diffusionsannäherung beschreibt jedoch allein die Vielfachstreuung bzw. Mehrfachstreuung. Für die vollständige ausgehende Strahldichte ist auch die Einfachstreuung notwendig.

4.2.3 Isotrope Dipolannäherung

Gleichung (4.12) ist einfacher zu lösen als die komplette Strahlungstransportgleichung. Es existieren eine Reihe von Lösungen die an bestimmte Voraussetzungen geknüpft sind. Im Falle eines einzigen isotropen Punktlichtquelle innerhalb eines unendlich ausgedehnten Mediums lässt sich die Diffusionsapproximation recht einfach lösen [45].

$$E_{0}(x) = \frac{\Phi}{4\pi D} \frac{e^{-\sigma_{tr} r(x)}}{r(x)},$$
(4.13)

mit Φ als Leistung der Punktlichtquelle, r als der Abstand zu ihr und σ_{tr} als effektiver Transportkoeffizient. Letzterer ist definiert mit $\sigma_{tr} = \sqrt{3\sigma_{\alpha}\sigma'_{t}}$. Das exponentielle Verhalten mit σ_{tr} ist typisch für eine Lösung der Diffusionsgleichung [71]. Die Bestrahlungsdichte nimmt exponentiell um die Punktlichtquelle ab. Darauf aufbauend ist die optische Eindringtiefe $\delta = \frac{1}{\sigma'_{t}}$ definiert. Nach Jensen [45] ändert sich unter diesen Annahmen die mittlere freie Weglänge zu $l_{d} = 1/\sigma_{tr}$. Eingangs wurde darauf schon Bezug genommen.

Die einzige Größe die sich in Gleichung (4.12) auf die Phasenfunktion, also dem Winkelverhalten der Streuung bezieht, ist σ_{tr} . Da aber in dieser auch nur der Anisotropiefaktor g berücksichtigt wird, gibt es keine Beschreibung der Winkelverteilung $p(\hat{\omega} \cdot \hat{\omega}')$ mehr.

Die dipolare Diffusionsannäherung (auch Methode der Spielgelladungen) ist eine Möglichkeit die Bestrahlungsdichte E_0 und ihre spektralen Veränderungen an einem Ort innerhalb eines Materials zu beschreiben. Auf seinem Weg durch ein Material verändert das Licht das Feld der Bestrahlungsdichte. Doch vor allem treten Änderungen an räumlichen Grenzen des zu beschreibenden Mediums auf. Für ein nicht unendlich ausgedehntes Medium müssen Randbedingungen beachtet werden, die den Übergang von einem Medium ins andere beschreiben und für eine Lösung die Diffusionsannäherung beachtet werden müssen. Die diffuse Lichtausbreitung geschieht nur *innerhalb* des Mediums und wird durch eine Oberfläche S begrenzt. Die Randbedingung soll sicherstellen, dass keine diffuse Strahlung von außen in das Medium eindringt und dass diffuse Strahlung an S immer nach außen gerichtet ist [37]. Ist \hat{w} nach innen gerichtet, lässt sich dies für einen Oberflächenpunkt x_s folgendermaßen mathematisch ausdrücken:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}_{s},\hat{\boldsymbol{\omega}}) = \mathbf{0}. \tag{4.14}$$

Gleichung (4.9) und Abbildung 11 stellen die Winkelverteilung der Diffusionsapproximation dar. Mit dieser einfachen Verteilung ist esjedoch nicht möglich diese Randbedingung zu erfüllen [37]. Stattdessen wird eine Annäherung an Gleichung (4.14) verwendet. Jensen [45] verwendet dazu die Randbedingung, dass der einfallende diffuse Netto-Strahlungsfluss an jedem Oberflächenpunkt x_s null sein muss. Das lässt sich folgendermaßen darstellen [45]:

$$\int_{2\pi_{-}} \mathsf{L}(\mathsf{x}_{s},\hat{\omega})(\hat{\omega}\cdot\hat{\mathsf{n}})\,\mathrm{d}\omega=0.$$

Die Integration über $2\pi_{-}$ (die negative Hemisphäre) repräsentiert die Hemisphäre auf S mit nach innen zeigenden Richtungen $\hat{\omega}$. Für ein halbunendliches Medium wird außerdem vorausgesetzt, dass die diffuse Strahlung im Unendlichen verschwindet. Mittels Gleichung (4.9) lässt sich die Randbedingung auch mit der Diffusionsannäherung beschreiben (algebraische Details bei Xu et al. [37]):

$$E_{0}(x_{s}) - 2D(\hat{n} \cdot \vec{\nabla}) E_{0}(x_{s}) = 0.$$
(4.15)

Jensen et al. [45] merken an, dass das Minuszeichen durch die Konvention entsteht, dass die Oberflächennormalen \hat{n} nach außen zeigen und das Integral der Randbedingung über einfallende Richtungen definiert ist.

Die Randbedingung in Gleichung (4.15) funktioniert so jedoch nur wenn S Medien mit gleichem Brechungsindex trennt. Mit Hilfe der FRES-NELschen Formeln (siehe Abschnitt 1.2.5) lässt sich aber eine Form für unterschiedliche Brechungsindizes finden. Jensen et al. [45] führen die kurze Berechnung weiter aus und kommen zu folgendem Ergebnis:

$$\mathsf{E}_{\mathsf{0}}(\mathsf{x}_{\mathsf{s}}) - 2\mathsf{A}\mathsf{D}(\hat{\mathsf{n}} \cdot \vec{\nabla}) \mathsf{E}_{\mathsf{0}}(\mathsf{x}_{\mathsf{s}}) = \mathsf{0}. \tag{4.16}$$

Bis auf den Faktor $A = (1 + F_{dr})/(1 - F_{dr})$ ist diese Randbedingung dieselbe wie Gleichung (4.15). Im Zusammenhang mit Gl. (4.21) wird noch näher auf die Herleitung eingegangen. Auf Basis von Gleichung (4.16) kann nun die diffuse BSSRDF R_d errechnet werden. Ziel ist es eine Beziehung zwischen dem Strahlungsfluss an einem Oberflächenpunkt x_i zur Ausstrahlung an x_o: R_d = $dM(x_o)/d\Phi(x_i)$. Nach [45] gilt $dM(x_o) = (\hat{n} \cdot \vec{E}(x_o))$ und mit Gleichung (??) somit:

$$R_{d}(x_{o}, x_{i}) = -D \frac{(\hat{n} \cdot \vec{\nabla} E_{0})(x_{o})}{d\Phi_{i}(x_{i})}$$
(4.17)

Die Bestrahlungsstärke E₀ kann nach Jensen et al. [45] auch durch zwei Punktlichtquellen angenähert werden. Das Auftreffen eines Lichtstrahls wird somit durch einen Dipol beschrieben. Zwei Punktlichtquellen, eine positive über eine negative unter der Oberfläche, dienen zur Berechnung von E₀ unter Einhaltung der Randbedingungen. Die erste (echte) Lichtquelle ist in einem Abstand z_r unter dem Oberflächenpunkt x_i positioniert. Ihr Gegenstück, die negative (virtuelle) Lichtquelle befindet sich im Abstand $z_v = z_r + 4$ AD *über* x_i . In [45] wird $z_r = 1/\sigma'_t = l_d$ empfohlen, unabhängig von der eigentlichen Einstrahlrichtung des Lichts. Donner und Jensen [22] erklären den Abstand der virtuellen Lichtquelle von S wie folgt: Mit einem Abstand von $z_b = 2AD$ über der Oberfläche verschwindet nach Gl. (4.16) die lineare Extrapolation der Bestrahlungsstärke E₀. Die Randbedingung fordert einen Netto-Strahlungsfluss gleich Null. Da $z_r = 1/\sigma'_t$ folgt $z_v = (1 + 4A/3)/\sigma'_t = 2z_b + l_d$ als Abstand der virtuellen Lichtquelle um zu erreichen, dass hier wiederum die Bestrahlungsstärke bei $-z_b$ verschwindet. Mit beiden Lichtquellen wird die Randbedingung also erfüllt. Abb. 12 versucht die Situation zu verdeutlichen. Davon ausgehend, wird die Bestrahlungsstärke mit Hilfe von Gleichung 4.13 definiert als

$$\mathsf{E}_{0}(\mathsf{x}_{o}) = \frac{\Phi(\mathsf{x}_{i})}{4\pi D} \left(\frac{e^{-\sigma_{tr}d_{r}}}{d_{r}} - \frac{e^{-\sigma_{tr}d_{\nu}}}{d_{\nu}} \right).$$

Diese Beschreibung ist nicht mehr von der konkreten Position der beiden Oberflächenpunkte x_i und x_o abhängig, sondern nur noch von den Abständen von x_o zu der echten und zur virtuellen Punktlichtquelle:



Abbildung 12: Die (isotrope) Dipolannäherung zur Diffusionstheorie, nach [45]

 $d_r = ||x_o - x_r|| = \sqrt{r^2 + z_r^2}$ bzw. $d_v = ||x_o - x_v|| = \sqrt{r^2 + z_v^2}$. Damit lässt sich R_d mit dem Dipol in Gleichung (4.17) darstellen [44]:

$$R_{d}(r) = \frac{\Lambda'}{4\pi} \left(C_{1} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{r}}}{d_{r}^{2}} + C_{2} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{\nu}}}{d_{\nu}^{2}} \right)$$
(4.18)

mit

$$C_1 = z_r(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_r})$$
 und $C_2 = z_v(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_v})$

Die (auf Isotropie) reduzierte Einfach-Streu-Albedo Λ' ist mit $\Lambda' = \sigma'_s / \sigma'_t$ gegeben. Im Vergleich zur tatsächlichen räumlichen Verteilung des einfallenden Lichts führt die Dipolbeschreibung in Verwendung mit der Diffusionsapproximation zu mindestens genauso guten Ergebnissen [45].

Da sich das Licht *im* Medium bewegt, durchquert es S auf dem Weg zum Betrachter zwei mal: bei x_i und bei x_o . Diese Übergänge werden von den FRESNELschen Formeln beschrieben. Somit hat der diffuse Anteil der BSSRDF folgende Form:

$$S_{d}(x_{i}, \hat{\omega}_{i}, x_{o}, \hat{\omega}_{o}) = \frac{1}{\pi} F_{t}(x_{i}, \hat{\omega}_{i}) R(||x_{i} - x_{o}||) F_{t}(x_{o}, \hat{\omega}_{o})$$
(4.19)

Mit Gleichung (4.19) ist die Vielfachstreuung in einem Medium, in dem sich Strahlung entsprechend der Diffusionstheorie ausbreitet, vollständig beschrieben. Setzt man diese nun in die Definition der Strahlungsdichte (1.11) ein, erhält man

$$L_{o}(x_{o}, \hat{\omega}_{o}) = \frac{F_{t}(\eta, \hat{\omega}_{o})}{\pi} \int_{A} R_{d}(||x_{i} - x_{o}||) E(x_{i}) \, dA.$$
(4.20)

Die bei x_i ins Medium eindringende Bestrahlungsstärke $E(x_i)$ ist damit definiert als (vgl. [72]):

$$\mathsf{E}(\mathsf{x}_{\mathfrak{i}}) = \int_{2\pi} \mathsf{L}_{\mathfrak{i}}(\mathsf{x}_{\mathfrak{i}}, \hat{\omega}_{\mathfrak{i}}) \mathsf{F}_{\mathfrak{t}}(\eta, \hat{\omega}_{\mathfrak{i}}) (\hat{\omega}_{\mathfrak{i}} \cdot \hat{n}) \, d\omega.$$

Mit Gleichung 4.20 kann nun die Strahldichte in jede Richtung an jedem Oberflächenpunkt errechnet werden. Um das Flächenintegral zu lösen gibt es verschiedene Methoden. Die einfachste ist eine Monte-Carlo-Integration die sich durch Importance-Sampling den exponentiellen Verlauf von R_d zunutze macht. In [45] wurde so verfahren. Eine deutliche Beschleunigung kann durch eine Entkopplung des Bestrahlungsstärken-Sampling und der Auswertung von 4.20 erreicht werden [44]. Darauf wird in Abschnitt 5.4 näher eingegangen.

4.2.4 Multipolannäherung

Unter der Voraussetzung, dass ein Medium als semi-infinit betrachtet werden kann, führt eine Dipolannäherung zu guten Visualisierungsergebnissen. Ist das Medium aber beispielsweise nur wenige Vielfache der mittleren freien Weglänge dick, trifft diese Annahme nicht mehr zu. Die Dipolannäherung unterschätzt dabei das transmittierte Licht; die Objekte erscheinen zu dunkel. Auch werden Materialien die möglicherweise unter der betrachteten Schicht liegen nicht berücksichtigt. Donner und Jensen haben daher 2005 [22] das Dipolmodell aus Abschnitt 4.2.3 dahingehend verallgemeinert, dass mit dem Multipolmodell auch eine Darstellung dünner Schichten möglich ist. Zusätzlich ermöglicht das Modell die Visualisierung von aus verschiedenen (transluzenten) Schichten bestehenden Materialien. Ein klassisches Beispiel dafür ist Haut.

Wurde beim Dipolmodell nur ein Dipol verwendet, so sind es bei der Multipolannäherung mehrere; theoretisch unendlich viele. Dies liegt in der Veränderung der Randbedingungen bei dünneren Schichten begründet. Eine wesentliche Annahme des Dipolmodells ist, dass in die Oberfläche eingedrungene Strahlung entweder absorbiert wird oder an die Oberfläche zurückkehrt [?]. Die dadurch beschriebene Voraussetzung eines halbunendlichen Mediums ermöglicht die Definition der Randbedingung mit Gleichung (4.16). Die Dipolannäherung berücksichtigt daher nicht, dass Strahlung auch die Oberfläche auf der Rückseite verlassen kann. Die Folge ist eine Überschätzung der Reflektanz an der Oberfläche, zu wenig Licht erreicht "gegenüber" liegende Oberflächenpunkte.

Geht man von einer dielektrischen Grenzfläche S zwischen zwei Medien aus, spielt das Verhältnis der beiden Brechungsindizes zueinanderder relative Brechungsindex η —eine wichtige Rolle. Mittels der FRES-NELschen Formeln lassen sich Reflexion und Transmission einer elektromagnetischen Welle an S beschreiben. Ist mit F_{dr} die diffuse FRESNEL-Reflektanz nach Gleichung (1.5) gegeben, kann die Randbedingung für das durch S begrenzte Medium beschrieben werden. Es wird davon ausgegangen, dass die Strahlung die das Medium verlassen hat, nicht mehr zurückkehrt [22]. Damit ist die an S nach innen gerichtete *diffuse* (durch Vielfachstreuung verursachte) Strahldichte gleich der an S durch innere Reflexion zurückgeworfene Strahldichte:

$$\int_{2\pi_{-}} L_{d}(\mathbf{x}_{s},\hat{\boldsymbol{\omega}})(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot-\hat{\boldsymbol{n}}) \, d\boldsymbol{\omega} = \mathsf{F}_{dr} \int_{2\pi_{+}} L_{d}(\mathbf{x}_{s},\hat{\boldsymbol{\omega}})(\hat{\boldsymbol{\omega}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) \, d\boldsymbol{\omega}. \quad (4.21)$$

Setzt man in diese Beziehung die Diffusionsannäherung mit Gl. (4.9) ein, ist das Ergebnis Gleichung (4.16). Mit der Grenzen $2\pi_{-}$ und $2\pi_{+}$ wird über die innere bzw. äußere Hemisphäre an einem Oberflächenpunkt x_s integriert. Selbige Randbedingung ist mit vertauschten Richtungen für die "Unterseite" einer dünnen Schicht sicherzustellen:

$$\int_{2\pi_+} \mathcal{L}_d(\mathbf{x}_s, \hat{\boldsymbol{\omega}})(\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \, d\boldsymbol{\omega} = \mathcal{F}_{dr} \int_{2\pi_-} \mathcal{L}_d(\mathbf{x}_s, \hat{\boldsymbol{\omega}})(\hat{\boldsymbol{\omega}} \cdot - \hat{\mathbf{n}}) \, d\boldsymbol{\omega}. \quad (4.22)$$

Setzt man auch hier die Gleichung (4.9) ein, erhält man einen sehr ähnlichen Ausdruck zu Gleichung (4.16):

$$\mathsf{E}_{0}(\mathbf{x}_{s}) + 2\mathsf{A}\mathsf{D}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \vec{\nabla}) \mathsf{E}_{0}(\mathbf{x}_{s}) = \mathbf{0}. \tag{4.23}$$

Damit ist je eine Randbedingung für die obere und untere Grenze der Schicht definiert. Besitzt die Schicht eine Dicke d und ist z die Entfernung von der Oberfläche in Richtung $-\hat{n}$, so gilt Gleichung (4.16) für z = 0 und Gl. (4.23) für z = d. Beide Randbedingungen gehen aber davon aus, dass das jeweils angrenzende Medium denselben Brechungsindex besitzt. Donner und Jensen [22] führen ihre Überlegungen weiter aus und beschreiben einen Weg diese Beschränkung aufzuheben. Im weiteren soll aber davon ausgegangen werden, dass diese Einschränkung haltbar ist. Letztlich müssen jedoch nur verschiedene A berechnet werden und infolge dessen verschiedene Entfernungen der Dipole zur Oberfläche.

In der Dipolannäherung wird die reale Punktlichtquelle in der Entfernung z_r einer mittleren freien Weglänge l_d unter der Oberfläche platziert. Damit die Randbedingung (4.16) erfüllt ist, muss die virtuelle Lichtquelle bei $z_v = (1 + 4A/3)/\sigma'_t = 2z_b + l_d$ positioniert werden. Wie eben beschrieben, reicht eine Randbedingung aber nicht mehr aus. Durch die Anordnung der beiden Lichtquellen bei z_r und z_v kann Gl. (4.23) aber nicht entsprochen werden.

Analog zu dem einfachen Dipol kann nun ein weiterer für die Erfüllung der unteren Randbedingung bestimmt werden. Der Strahlungsfluss verschwindet nach Gleichung (4.23) bei einer Tiefe von $d + z_b$, eine Entfernung von z_b *unter* der Schicht [22]. Beim ersten Dipol war dies bei z_b *über* der Oberseite der Fall. Beide Dipole zusammen erfüllen nun die zweite Randbedingung, kein Strahlungsfluss bei $d + z_b$. Damit gilt aber die erste Randbedingung nicht mehr. Dies kann aber gewährleistet werden, indem der zweite Dipol wieder nach oben gespiegelt wird. Um beide Randbedingungen gleichzeitig zu erfüllen, sind eine unendliche Anzahl von Dipolen notwendig [22].

Für ein die Schicht umgebendes Medium und damit denselben Brechungsindizes über und unter der Schicht, werden die *z*-Komponenten der Position der einzelnen Dipole folgendermaßen berechnet [22]:

$$z_{r,i} = 2i(d + 2z_b) + l_d$$

 $z_{v,i} = 2i(d + 2z_b) - l_d - 2z_b$, $i = -n, ..., n$.

Dabei gilt 2n + 1 als die Gesamtanzahl der Dipole, d ist die Schichtdicke und die Extrapolationsentfernung $z_b = 2AD$. Darauf aufbauend kann nun die Reflektanz als Summe der Einzeldipole definiert werden [22]:

$$R_{d} = \frac{\Lambda'}{4\pi} \sum_{i=-n}^{n} \left(C_{1} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{r,i}}}{d_{r,i}^{2}} + C_{2} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{\nu,i}}}{d_{\nu,i}^{2}} \right)$$
(4.24)

mit

$$C_1 = z_{r,i}(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_{r,i}})$$
 und $C_2 = z_{\nu,i}(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_{\nu,i}}).$

Analog zum einfachen Dipolmodell sind die Entfernungen von x_o zu der realen und der virtuellen Lichtquelle definiert als $d_{r,i} = \sqrt{r^2 + z_{r,i}^2}$ bzw. $d_{v,i} = \sqrt{r^2 + z_{v,i}^2}$. Wie auch bei Donner et al. [22] soll darauf hingewiesen sein, dass das einfache Dipolmodell beschrieben wird, wenn n = 0. Um zu ermitteln wie viel Licht transmittiert wird, können die z-Komponenten entsprechend der Schichtdicke nach unter verschoben werden. Es kann damit für die Ermittlung der Transmittanz Gleichung (??) mit veränderten Koeffizienten C₁ und C₂ verwendet werden:

$$T_{d} = \frac{\Lambda'}{4\pi} \sum_{i=-n}^{n} \left(C_{1} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{r,i}}}{d_{r,i}^{2}} + C_{2} \frac{e^{-\sigma_{tr} d_{\nu,i}}}{d_{\nu,i}^{2}} \right)$$
(4.25)

mit

$$C_1 = (d - z_{r,i})(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_{r,i}})$$
 und $C_2 = (d - z_{v,i})(\sigma_{tr} + \frac{1}{d_{v,i}}).$

Ob in einer konkreten Situation Beziehung (4.24) oder (4.25) genutzt werden soll, hängt im Allgemeinen von der Ausrichtung der Normalen n_o des Oberflächenpunkts x_o zu der Normalen n_i des Punkts der Bestrahlungsstärkenstichprobe ab. Damit kann nach Donner et al. [22] eine Profil P_d für den gewichteten Durchschnitt von R_d und T_d gebildet werden:

$$P_{d}(r) = \frac{1}{2}(\hat{n}_{o} \cdot \hat{n}_{i} + 1)R_{d}(r) + \frac{1}{2}(1 - \hat{n}_{o} \cdot \hat{n}_{i})T_{d}(r).$$
(4.26)

Mit diesem Profile ist sichergestellt, dass nur R_d genutzt wird wenn die Normalen in dieselbe Richtung zeigen und entsprechend nur R_d wenn sie entgegengesetzt ausgerichtet sind. Verwendet werden können die Profile R_d , T_d und P_d entsprechend der einfachen Dipolannäherung.

4.2.5 Beschleunigte Photonenausbreitung

Schnee bzw. Eisteilchen sind stark vorwärtsstreuend. Die Phasenfunktion beschreibt das Verhalten bei einem Streuereignis und der mittlere Cosinuswert ihrer Streuwinkel macht dies mit einem Wert von ≈ 0.85 für typische Schneetypen deutlich. Frisvad et al. [29] weißt darauf hin, dass die häufig verwendete Diffusionsapproximation bei dieser Art von optischen Eigenschaften an ihre Grenzen stößt. Somit müssen andere Auswertungsstrategien gesucht und genutzt werden. Als Maßstab bieten sich aufwändige Monte-Carlo-Simulationen an. Das Ergebnis zeigt die Effekte optischer Eigenschaften ohne weitere Fehler mit sich zu bringen [29]. Vor allem optisch Dicke Medien mit einer hohen Einfach-Streu-Albedo bringen eine jedoch eine Vielzahl von Streuereignissen mit sich. Eine Monte-Carlo-Simulation bedeutet in dieses Fällen häufig eine sehr lange Strahlenverfolgung innerhalb eines Mediums. Lee und Sullivan [50] schlagen daher ein Verfahren vor, eine beschleunigte Photonenausbreitung (engl. accelerated photon propagation), dass Photonen die Teleportation im Inneren eines Mediums erlaubt.

Photonen treten in diesem Modell durch herkömmliches Photon Tracing in das Medium ein. Ist der Abstand zur Oberfläche kleiner als ein Schwellwert τ wird das Photon Tracing fortgesetzt. Für größerer Entfernungen wird die aktuelle Position x als Zentrum einer Kugel aufgefasst, deren Radius der größtmögliche innerhalb des Mediums ist. An Stelle von der Verfolgung einzelner Photonen von Streuereignis zu Streuereignis, wird eine zufällige Folgeposition x' und -richtung $\vec{\omega}'$ auf der Kugel ermittelt. Die hohe Anzahl an Wechselwirkungen innerhalb eines stark streuenden Mediums kann durch einen Radius der Größe eines Vielfaches der mittleren freien Weglänge stark reduziert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon eine bestimmte Position und einer bestimmte Richtung auf der Kugelfläche einnimmt, soll genauso groß sein, wie das reguläre Erreichen dieser Situation. Entsprechend muss Importance Sampling auf Basis einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) verwendet werden.

Bewegt man x in den Ursprung und rotiert $\vec{\omega}$ so, dass die Richtung als Einheitswinkel nach oben zeigt, lässt sich die PDF einfacher darstellen. Die inversen Operationen lassen eine problemlose Rücktransformation zu Ausgangsposition und -richtung zu. In diesem Koordinatensystem sind Position und Richtung fixiert und so gilt es eine 4D-PDF zu definieren: $p(\alpha, \beta, \theta, \phi)$. Die Austrittsposition x' ist über die Kugelkoordinaten α und β definiert, $\vec{\omega}'$ entsprechend als θ und ϕ . Da wie bei der Phasenfunktion von Achsialsymmetrie in Bezug auf die Polarachse ausgegangen wird, kann die PDF aufgeteilt werden in $p(\beta) = \frac{1}{2\pi}$ und $p(\alpha, \theta, \phi)$. Um den 3D-Teil von p zu ermitteln wird ein Monte-Carlo-Verfahren bemüht. In diesem wird das Verhalten einer großen Anzahl von Photonen (in der Größenordnung einer Million) in einer Kugel entsprechenden Materials simuliert: Ausgangspunkt ist der Ursprung. Von der aktuellen Position aus wird die Entfernung zum Schnittpunkt mit der Kugel mit Radius r in die aktuelle Richtung berechnet. Ist diese kleiner als eine zufällige Absorptions- oder Streuweglänge $t_{\alpha} = -\log \xi / \sigma_{\alpha}$ bzw. $t_s = -\log \xi / \sigma_s$ mit einer gleich verteilten Zufallszahl ξ im Intervall [0, 1], wird das Photon nicht mehr weiter verfolgt. Ist $t_a > t_s$ kommt es zur Absorption. Andernfalls wird eine neue Position auf Basis von t_s bestimmt und und eine neue Richtung durch die Phasenfunktion durch Importance Sampling bestimmt. Dies wird so lange wiederholt bis alle Photonen die Kugel verlassen haben oder absorbiert wurden.

Speichert man die Austrittsorte und -richtungen, lassen sich diese in einer tabellierten Form von α , θ und ϕ einordnen und entsprechend zählen. Jedem Tabelleneintrag wird so ein skalarer Wert zugeordnet, welcher die Wahrscheinlichkeit repräsentiert durch diesen die Kugel zu verlassen. Die Wahrscheinlichkeit in der umgebenden Kugel absorbiert zu werden, ist der Anteil an absorbierten Photonen. Die Anzahl an unterschiedlichen PDFs wird durch die Menge an gewünschten unterschiedlichen Radien bestimmt. So wird im Rendervorgang aus dieser Menge abhängig von der kürzesten Entfernung zur Oberfläche eine PDF ausgewählt. Damit ist die PDF in diskreter Form ermittelt und kann zur Bildberechnung benutzt werden. Lee und Sullivan[50] beschreiben den Sampling-Vorgang und somit die Ermittlung des Austrittspunkts auf der Kugel umfassend und so sei dahingehend auf ihre Veröffentlichung verwiesen. In dieser wird τ und der kleinste sinnvolle Radius für eine Berechnung einer PDF als die mittlere freie Streuweglänge $1/\sigma_s$ definiert.

Mit diesem Verfahren kann eine deutliche Geschwindigkeitssteigerung gegenüber Monte-Carlo-Path-Tracing erreicht werden. In den Beispielen von Lee und Sullivan wurden α , θ und ϕ mit je 16 Einträgen in der Tabelle repräsentiert und eine Million Photonen für die Vorberechnung genutzt. Für jede Wellenlänge bedarf es einer eigenen Tabelle, aber ist die Speicherung der PDFs mit ~ 400KB sehr moderat.

4.2.6 Echtzeitdiffusion mittels Splatting

Der diffusen Strahlungsausbreitung liegt eine isotrope Streuung zu Grunde. Damit verhält sich Licht an einem spezifischen Oberflächenpunkt genauso wie an anderen Stellen der Oberfläche. Allein, eine Abhängigkeit von der Bestrahlungsstärke in der Umgebung ist gegeben. Shah et al. [72] machen sich dies zunutze indem sie eine "Splatting"-Technik als Fundament ihrer Echtzeit-Diffusions-Methode wählen. Der Algorithmus läuft vollständig auf der Grafikkarte und profitiert von der Parallelisierung. Der Algorithmus arbeitet im Bildbereich und somit können mehrere transluzente Objekte problemlos gleichzeitig dargestellt werden.

Splatting ist eine Technik die häufig zur Volumendarstellung genutzt und ermöglicht es recht einfach große Datenmengen zu visualisieren [85]. An ausgewählten Oberflächenpunkten wird ein Primitiv (z.B. ein Rechteck) samt einer Textur dargestellt. Die Überlagerung vieler Primitive bestimmt dann das Ergebnisbild. Bei Berechnung der Textur und der Überlagerungsmethode kann entsprechend Einfluss genommen werden. So kann beispielsweise Transparenz in der Textur enthalten sein oder Transluzenz simuliert werden.

Die verwendete Textur ist hier das Diffusionsprofil der aktuellen Schneekonfiguration. Entsprechend muss die diffuse Reflektanz R_d nach Gleichung (4.18) oder Gleichung (4.24), je nachdem ob der Dipol- oder Multipolansatz genutzt wird, ermittelt werden. Das numerisch ermittelte Diffusionsprofil wird tabellarisch in der Textur abgelegt. Vor allem für die Verwendung von Multipol-Berechnungen ist eine Textur bzw. LookUp-Tabelle unabdingbar. Die Berechnungen dauern ohne diese zu lang um nur annähernd echtzeitfähig zu sein.

Eine Auswahl der Oberflächenpunkte wird bei Shah et al. [72] durch eine Schattenkarte (engl. shadow map) getroffen. Die Stellen die durch direkte Lichteinstrahlung beleuchtet werden, repräsentieren Punkte x_i an denen die (weithin Splats genannten) Primitive, hier Quadrate, gezeichnet werden. Wird die Szene aus Sicht einer Lichtquelle berechnet, können genau diese Punkte gefunden werden. Außerdem wird die Bestrahlungsstärke an x_i gespeichert. Aus Sicht des Betrachters werden an allen für diesen sichtbaren Oberflächenpunkten die Beiträge der umliegenden Splats berücksichtigt. Dabei stellt die Größe der Splats einen effektiven Streuradius r_{max} für das Licht dar. Ermittelt werden kann dieser analog zu Abschnitt 5.5 durch numerische Lösung der Beziehung (5.2).

Als nächstes gilt es eine Textur aus Sicht des Betrachters zu erzeugen, die die durch Vielfachstreuung verursachte Strahldichte repräsentiert. Dazu wird wie beim Ermitteln der Punkte x_i eine Karte der Punkte x_o erstellt die durch den Betrachter sichtbar sind. Das Ergebnis ist ebenfalls eine Textur in der die Positionen der Oberflächenpunkte in den Farbkanälen kodiert sind. Darauf folgt das eigentliche Darstellen der Splats. Jeder ermittelte Ursprung x_0 wird als Zentrum eines Quadrats verstanden. Die Kantenlänge beträgt dabei das Zweifache von r_{max} . Die Splats werden parallel zur Projektionsebene im Kameraraum erzeugt. Projiziert und normalisiert man nun die Eckpunkte der Quadrate kann darauf aufbauend ein Index in x_o-Karte errechnet werden. Damit wird die wirkliche Position des Oberflächenpunkts bekannt und es kann die Entfernung d zu x_i ermittelt werden. Mit dieser kann nun die Menge an Licht ermittelt werden, die durch Vielfachstreuung, ausgehend von eben diesem Splat, bei x_0 ankommt. Dazu wird ein entsprechender Index in das Diffusionsprofil gebildet. Der resultierende Wert wird mit der auf x_i einstrahlenden Bestrahlungsstärke multipliziert und der aktuellen Ecke des Quadrats zugewiesen.

So wird jede Ecke eines jeden Splats behandelt. Diese wiederum werden mittels additiver Alphamischung (engl. additive alpha blending) zu einer Ergebnistextur überlagert. Effektiv wird damit das Integral aus Gleichung (4.20) gelöst [72].

Abschließend wird die so entstandene Textur auf das eigentliche Objekt projiziert. Dies geschieht in einem separaten Schritt da eine klare Silhouette des Objekts gewünscht ist. Die Splats am "Rand" gehen über diesen hinaus und wären bei direkter Verwendung der Vielfachstreuungstextur sichtbar.

5

Um aus einer Szenenbeschreibung ein Bild zu erzeugen gibt es die verschiedensten Möglichkeiten. Vor allem die durch Licht verursachten Phänomene und welche davon Berücksichtigung finden sollen, beeinflussen stark welche Methoden verwendet werden. Beispielsweise sind Kaustiken und Abfärbungen (engl. color bleeding) nur mit bestimmten Verfahren möglich. Physikalisch korrekte Darstellungen solcher Effekte sind oft mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. So verwundert es nicht, dass man sie in Echtzeitanwendungen häufig vergebens sucht. Die Beschleunigung und Verbesserung dieser Verfahren ist ein eigener großer Teil der Computergrafik und liegt nicht im Fokus dieser Arbeit. Um für die Realisierung photorealistischen Schnees eine gute Ausgangsbasis zur haben, wird der von Wenzel Jakob entwickelte Mitsuba-Renderer [41] genutzt. Mitsuba baut ursprünglich auf dem Renderer PBRT zum Buch "Physically Based Rendering" [67] auf. Mittlerweile ist dies aber nur noch der Kern und viele neue Algorithmen finden sich in dem unter der Lizenz GPLv3 veröffentlichten Programm. Im Zuge dieser Arbeit wurden ebenfalls einige hinzugefügt und auf bestehende zurück gegriffen. Gleichzeitig konnten auch Korrekturen an bestehendem Code vollzogen werden und somit samt entstandener Entwicklungen zurückfließen.

Die eigentliche Bildberechnung musste nicht mehr implementiert werden. Die in Mitsuba vorhandenen Renderalgorithmen wurden genutzt und sich der internen Struktur angepasst. Somit kam in den meisten Berechnungen der Photon Mapper [43] zum Einsatz. Für die Implementierung der Echtzeit-Volumenstreuung konnte auch auf die bereits bestehende Shader-Abstraktion zurückgegriffen werden. Einen guten Ausgangspunkt für die Vielfachstreuung lieferte das bereits vorhandene Dipol-Modell mit hierarchischer Auswertung [44]. Damit konnte vor allem auch zu Beginn die Theorie besser nachvollzogen werden. Im Laufe der Arbeit wurde das Multipol-Modell [22] hinzugefügt. Im Zuge dessen wurden beide Modelle um eine beschleunigte Auswertung durch die Verwendung von Look-Up-Tabellen erweitert. Dem Dipolmodell wurde außerdem die Möglichkeit zur Parametrisierung mittels Textur gegeben. Das Hanrahan-Krueger-Modell [33] für Einfachstreuung und die scheespezifische Wiscombe-Warren-BRDF [87] wurden implementiert. Aufbauend auf Quelltext von Sébastien Hillaire [36] konnte die Echtzeitdiffusion von Shah et al. [72] gut in Mitsuba realisiert und in die Oberfläche integriert werden. Die Basisoberfläche von Mitsuba basiert auf QT4 und ist um einige Oberflächenelemente zum Festlegen der Schnee- und Renderparameter erweitert worden. Um Schneeoberflächen, die als Höhenspannenkarten vorliegen, darstellen zu können, wurde Mitsuba um einen entsprechender Importer erweitert.

Um zur Beleuchtung eine gute Annäherung des Tageslichts zu bekommen, wurde das Modell von Preetham [68] für das diffuse Himmelslicht implementiert. Damit konnten Ergebniswerte besser mit Messungen aus anderen Veröffentlichungen verglichen werden. Die Beobachtungen und Beschreibungen der verwendeten und anderen Schneeparametern wurden zudem mittels dem Computeralgebasystem Sage [76] implementiert. Darauf aufbauend konnten viele Tests gemacht werden um, zum Beispiel, Bilddaten mitteln Monte-Carlo-Simulation zu verifizieren. So sind eine Reihe kleiner Hilfsskripte entstanden. Auch die Generierung von Parametertexturen werden durch ein solches ermöglicht.

Ziel ist eine photorealistische Visualisierung. Im Gegensatz zur physikalisch basierenden Berechnungen steht die Erscheinung im Vordergrund, nicht dessen Erzeugung. Daraus folgt, dass nicht ausschließlich physikalisch basierte Methoden genutzt werden können, sondern alles was einen positiven Beitrag dazu liefert eine Illusion vor echtem Schnee zu erzeugen.

5.1 SZENEN & UMGEBUNG

Für die Visualisierung der Schneeoberflächen wird grundsätzlich auch Licht benötigt. Da Schnee hauptsächlich im Außenbereich vorkommt, sind für dessen photorealistische Darstellung auch Eigenschaften der Sonne und des Himmels wichtig. Beides soll hier kurz beleuchtet werden. Die von der Sonne abgegebene elektromagnetische Strahlung verteilt sich vom ultravioletten über den sichtbaren bis weit in den infraroten Bereich des elektromagnetischen Spektrums. Hier wird nur der sichtbare Teil, das Licht, betrachtet.

Die Zusammensetzung der Atmosphäre sorgt für die verschiedenen Farbgebungen des Himmels. Deren verschiedene Schichten stellen auch den den ersten Verlustmechanimus von Strahlungsenergie dar. Durch Streuung wird Licht abgelenkt und tritt an möglicherweise ganz anderen Richtung auf die Erde. Dadurch dass in ihr hauptsächlich kleine Moleküle und Aerosole vorkommen, liegt in der Atmosphäre vorwiegend RAYLEIGH- und LORENZ-MIE-Streuung vor. Wie in Abschnitt 1.2.3 beschrieben, werden kürzere Wellenlängen, zum Beispiel blaues Licht, stärker gestreut. RAYLEIGH-Streuung ist daher die Ursache für das die Farbgebung des Himmels.

Durch die meist selektive Absorption von Wasserdampf, Sauerstoff und Kohlendioxid entstehen außerdem Bandlücken [59]. Im sichtbaren Bereich ist es vor allem Ozon, was die Zusammensetzung des Licht durch Absorption verändert.

Um diese Erscheinungen nun möglichst effizient und einfach anzunehmen wurde das analytische Modell von Preetham et al. [68] implementiert und in den Mitsuba-Renderer integriert. Der Algorithmus geht von einer Beleuchtungskonfiguration für den Zenit aus und interpoliert Werte für andere Sonnenstände. Dieses häufig eingesetzte Modell wurde 2007 zu Recht von Zotti et al. wegen kleineren Unzulänglichkeiten kritisiert [88]. Es gibt Bereiche numerischen Instabilitäten und auch die gesamte eintreffende Strahlung entspricht nicht immer der Realität. Für die Belange dieser Arbeit ist das Modell aber ausreichend und bietet eine gute Lichtquelle auf deren Basis Außenszenen erstellt werden können.

Preethams Modell wurde nur für die Tagszenen verwendet. Nachtszenen wurden allein durch die Lichtquellen in der Szene beleuchtet. Für die Beschreibung der Szenen wurde auf das von Mitsuba genutzte XML-Format gesetzt. Elemente wie Object-Dateien, Höhenspannenkarten und die Beleuchtung können darin festgelegt werden. Schneeparameter werden entsprechend den Benutzenvorgaben dynamisch von der Anwendung hinzugefügt.

5.2 ALLGEMEINE BILDBERECHNUNG

Das Rendern einer Schneeoberfläche ist bei verschiedenen Konfigurationen durch mehrere Durchgänge gekennzeichnet. Einzelne Bildkomponenten werden separat berechnet und miteinander kombiniert. Auch Filter lassen sich somit sehr einfach in den Prozess einbinden. Diese Struktur ist aber nicht zuletzt der Verschiedenheit der realisierten Techniken zu schulden. Beispielsweise setzt die Implementierung Jensens Vielfachstreuungsmodell *hier* Methoden der globalen Beleuchtung voraus. Der typische Glitzereffekt lässt sich mit Lius Bloomfilter hingegen gut auf Basis von Rasterverfahren und lokaler Beleuchtung realisieren [52]. Vor allem aber die Echtzeitdiffusion benötigt mehrere (vier) Renderdurchgänge.

Für die Berechnung der Bilder ohne Anspruch an Echtzeitgeschwindigkeit werden die bereits in Mitsuba vorhandenen Rendermöglichkeiten genutzt. So kommt bei fast allen Bildern Jensens Technik des Photon Mappings zum Einsatz. Damit können Beleuchtunginformation in einer separaten Datenstruktur (der Photonenkarte oder engl. photon map) vorberechnet, gespeichert und beim Auswerten verwendet werden. Das hat den Vorteil, dass indirekte Beleuchtung auch in komplexeren Szenen kein großen Problem darstellt.

Es wäre von Vorteil wenn Schnee in verschiedener Art und Weise in der Szene beschrieben werden könnte. Bei Nishita et al [61] und Fearing [28] hat sich gezeigt, dass eine implizite Darstellung viele Vorteile zur Gestaltung mit sich bringt. Eine einfache Polygonbeschreibung würde vor allem die Entwicklung sowie die Beschreibung vereinfachen. Manche Schneemassen könnten auch gut durch Bézierflächen dargestellt werden [61]. Der Einfachheit halber wurde hier jedoch auf eine Polygonbeschreibung—ein Dreiecksnetz—zurückgegriffen, da der Modellierung selbst hier keine hohe Priorität zuteil wird.

Grundsätzlich gilt es bei allen Szenen die Maße zu beachten, da einige der Parameter zur Beschreibung der Vielfachstreuung einheitenbehaftet sind. So werden beispielsweise der Absorptionskoeffizient σ_{α} und der Streuungskoeffizient σ_s hier in der Einheit $\frac{1}{m}$ angegeben. Werden diese Zahlenwerte direkt zur Beschreibung der Schneeoberfläche genommen, wird gleichzeitig vorausgesetzt, dass diese mit Meterangaben definiert wurde. Durch Anpassen der Koeffizienten kann man diese aber auch der Szenenvorabge anpassen. Stimmt die Einheitenbasis nicht überein, wird die Vielfachstreuung falsch dargestellt. So würde bei einer Szenendefinition auf Zentimeterbasis und Vielfachstreuungskoeffizienten auf Meterbasis die Vielfachstreuung viel zu schwach ausgeprägt sein.

5.2.1 Höhenspannenkarten

Eine Visualisierung von Schneeoberflächen setzt voraus, dass bekannt ist an welchen Stellen wie viel Schnee liegt, es müssen Akkumulationsinformationen vorhanden sein. Verschiedene Ansätze existieren bereits um eine plausible Schneeverteilung zu erzeugen.

Schnee lässt sich sehr gut als granulares Material beschreiben, er besteht aus einer Ansammlung von Kristallen, Wasser, Luft und Einschlüssen. So stellte Fearing dessen Stabilität von Schnee in seinem Akkumulationsmodell mittels Schüttwinkeln dar [28]. Um die Oberflächenauflösung gut kontrollieren zu können, bietet es sich an, die Oberfläche in Zellen eines Gitternetzes aufzuteilen. Dies ermöglicht auch den Schnee lokal einfach verändern zu können und adaptiv genauer zu werden. Alternativ dazu ist die Verwendung einer DELAUNAY-Triangulierung bzw. eines VORONOI-Diagramms gut möglich. Normale Höhenkarten, wie sie zum Beispiel von Summer et al. auch für Schnee benutzt werden [69], erlauben leider keine selbstverdeckende Geometrie.

Zuletzt wurde 2009 durch von Festenberg eine neue Herangehensweise zur Schneeakkumulation veröffentlicht [80]. Der Ansatz soll hier nicht näher beschrieben werden, jedoch wird eine von ihm verwendete Datenstruktur verwendet. Zur Speicherung von Informationen über die Schneeakkumulation werden *Höhenspannenkarten* (engl. height span maps) verwendet. Diese ursprünglich 2005 von Onoue und Nishita vorgestellte Struktur [64] kann auch zur Repräsentation von Schnee in dieser Arbeit genutzt werden.

Höhenspannenkarten sind eine geschichtete Datenstruktur die es auch erlaubt konkave Objekte darzustellen. Im Wesentlichen werden normale Höhenkarten dahingehend erweitert, dass weitere Schichten darstellbar sind. Diese Schichten werden durch Höhenspannen beschrieben, das heißt ihr vertikaler Beginn zusammen mit der relativen Höhe beschreiben wo sich welche Schicht befindet. Letztendlich entsteht so ein uniformes Gitter mit einer Liste von solchen Übergangspunkten in jeder Zelle. Übergänge können dann entweder Luft–Objekt und Objekt–Schnee sein. Diese Übergänge werden dann einer Richtung entlang—meistens nach Oben, entgegen der typischen Schneefallrichtung—sortiert [80]. Die Einzelnen Übergänge können noch weitere Attribute wie beispielsweise die Schneehöhe oder den Abstand zur nächsten Kante besitzen. In Abbil-



Abbildung 13: Ein zweidimensionale Höhenspannenkarten nach [80]. Es gibt verschiedene Übergänge: Objekt–Luft (Quadrat) und Objekt– Schnee (Kreis).

dung 13 sind die so entstehenden quadratisches vertikalen Säulen auf einem eindimensionalen Höhenfeld dargestellt.

Eine Höhenspanne ist einer Zelle der Höhenspannenkarten zugeordnet. Ein Element i der Höhenspanne braucht damit die folgenden Elemente: Basishöhe h_1 , Schneehöhe h_2 , Typinformation t, Nachbarflag f, Ost-Schneeoffset d_x , Nord-Schneeoffset d_y und für jede Himmelsrichtung r ein Paar aus Nachbardistanz d_r sowie Nachbarelementindex i_r . Für die Repräsentation von Schneeoberflächen wurde bei von Festenberg auch der Abstand einer Zelle vom nächsten inneren und nächsten äußeren Rand relevant. Diese Entfernungen werden zusätzlich pro Zelle gespeichert.

Für die Verwendung mit Samplingverfahren ist Vorsicht geboten. Eine Höhenspannenkarten repräsentiert den Schnee einer ganzen Szene. Einzelne beschneite Flächen müssen nicht notwendigerweise mit einander verbunden sein. Daher muss entweder der Sampler dafür sorgen, dass Stichproblen auf allen von einander unabhängigen Teilen erzeugt werden. Oder unverbundene Netzsegmente werden als getrennte Oberflächen betrachtet. Letzter Möglichkeit ist einfacher zu implementieren und erspart eine Erweiterung der verschiedenen Sampler. Daher wurde hier eben dieser Weg gewählt. Beispielsweise berechnet sich die von Jensen [44] vorgeschlagene Stichprobenanzahl im *Irradiance-Octree* zur Beschleunigung der Dipolannäherung als $A/(\pi l_s^2)$. Sind in der Oberfläche A aber mehrere Flächen inbegriffen, werden wahrscheinlich zu wenige Stichproben in mind. einer Oberfläche erzeugt. Ungüngstigerweise sind dadurch kleinere Flächen eher betroffen.

Auf Dateiebene stellt das *hspan*-Dateiformat die Schneeoberflächen dar und ermöglicht somit Persistenz für die Oberflächen. Das auch in [80] verwendete Format existiert mittlerweile in der dritten Version. In der Form einer erweiterten Backus-Naur Form (EBNF) sind diese in Listing 1 als Symbole Hspan1, Hspan2 und Hspan3 dargestellt.

Die einzelnen Elemente stehen in einer Zeile direkt nach der Posititionsinformation der Zelle. Die verschiedenen Versionen haben dabei folgende Semantik:



Die Menge von Höhenspannenelementen kann dünnbesetzt angegeben werden. Stellen ohne Schnee müssen also nicht deklariert werden. Mit Basishöhe h_1 , Schneehöhe h_2 , Typinformation t, Nachbarmarkierung f, Ost-Schneeoffset d_x , Nord-Schneeoffset d_y und für jede Himmelsrichtung r ein Paar aus Nachbardistanz d_r sowie Nachbarelementindex i_r sind damit alle Informationen gegeben die notwendig sind um die Karte zu lesen und zu interpretieren.

5.3 OBERFLÄCHENBESCHAFFENHEIT

Kleine Variationen in der Oberfläche tragen sehr zur physikalischen Glaubwürdigkeit bei. Denn ohne solche zufälligen Änderungen erscheinen Oberflächen schnell monoton und damit unnatürlich. Die Wichtigkeit solcher Substrukturen wurde auch von Hanrahan und Krueger im Rahmen ihres Einfachstreuungsmodells betont [33].

Zu viele Parameter und (feste) Teilchen sind in der Entstehung von Schnee und Eis beteiligt, als dass solche Effekte für Schnee irrelevant wären. Während der Blick auf Große Flächen und Objekte gerichtet ist, fallen Oberflächenstrukturen kaum auf. Die hohe Albedo von Schnee überblendet viele Details. Je näher Bereiche jedoch zum Betrachter rücken, desto mehr Substrukturen werden erkennbar. Dies ist vor allem auch in durchschienenen Flächen sichtbar; das in Abbildung 25 dargestellte Schneelicht macht dies durch viele kleine Helligkeitsunterschiede deutlich. Verschiedene Methoden existieren um einen guten Kompromiss zwischen Realitätsnähe und Geschwindigkeit zu finden. Eine detailreiche Geometrie bewegt sich bei kleineren Modellen häufig noch im möglichen Rahmen, stößt aber bei aufwändigeren Szenen schnell an ihre Grenzen. Ein interessanter Ansatz wäre es auf Schnee angepasste sich adaptiv verfeinernde Oberflächen zu nutzen. Schnee in nicht allzu großer Entfernung würde damit als weniger aufwändige Geometrie dargestellt. Häufig wird dazu eine Form des Displacement-Mappings¹ verwendet. Zum Darstellen der Bilder wurde in den meisten Fällen jedoch Photon

¹ Eine Methode die einen gewünschten Detailgrad durch Hinzufügen von neuen Knoten ins Gitternetz und dessen Veränderung ermöglicht.

Mapping eingesetzt, eine globales Beleuchtungsverfahren nach Jensen [43]. Da diesem auch Strahlungsverfolgung zu Grunde liegt, war die Implementierung von Displacement-Mapping nicht ohne weiteres möglich. Die Verfahren von Pharr and Hanrahan [66] sowie von Smiths at al. [74] würden in diesem Kontext funktionieren, wurden aber nicht implementiert. Stattdessen wurden Versuche mit hochaufgelöster Geometrie sowie Texturierung der Vielfachstreuungsparameter gemacht.

5.3.1 Modellierung mittels Geometrie

Geht man von einer Korngröße von etwa 0,3mm aus, würden etwa 11.111.000 Eisteilchen die direkte Oberfläche eines Quadratmeters Schnee darstellen. Will man jedes Teilchen nur als sich erhebende Spitzen darstellen, werden zusätzlich noch "Tal-Knoten" im Gitternetz benötigt. Diese befinden sich zwischen einem jeden Paar von Teilchenknoten, es kämen also etwa doppelt so viele Knoten hinzu. Mit mehr als 20.000.000 Knoten pro Quadratmeter kommt man sehr schnell an Speichergrenzen. Diese Auflösung ist nicht immer notwendig und auch die Vielfachstreuung glättet viele Elemente. Oftmals ist dennoch eine feine Oberflächenstruktur erkennbar. Somit ist eine alternative Darstellung der Oberflächenbeschaffenheit vorzuziehen. Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle bestehen alle aus etwa 500.000 Knoten; hier wurde also dennoch häufig die explizite Geometrie der Einfachheit halber zur Modellierung genutzt.

5.3.2 Texturierung

Variationen in der Oberfläche des Schnees können problemlos über lokale Änderungen der für die Streuung relevanten Koeffizienten realisiert werden. Diese können in Texturen gespeichert werden, auf welche die Bildberechnung zur Beschaffung der lokalen Parameter zurückgreifen kann. Diese Vorgehensweise wurde schon von Hanrahan und Krueger [33] für die Parametrisierung ihres Einfachstreuungsmodell genutzt. Um Gesichter realistisch darzustellen zu können, wurden beispielsweise verschieden Melaninkonzentrationen an verschiedenen Stellen im Gesicht beschrieben.

Durch Oberflächenstrukturen entstehen neue Schattierungen. Auch für die Darstellung von Schnee gilt es somit *etwas* dunklere Strukturen zu erzeugen. Im Gegensatz zu den anderen Methoden hat man hier auch die Möglichkeit für farbliche Nuancen. Bei uniformen Licht ist es möglich mit der Diffusionsapproximation einen guten Ausgangspunkt für den Farbeindruck zu bekommen. Das ist hilfreich, da sich die benötigten Parameter σ'_{s} und σ_{a} unlinear im Bezug auf den optischen Eindruck verhalten und damit schwer zu interpretieren sind. Jensen und Buhler [44] sowie Hery [35] schlagen dazu eine praxistaugliche und pragmatische Methode vor. Mit ihr kann der optische Eindruck in einer ähnlichen Beleuchtungssituation repräsentiert werden. Geht man von einem Bild aus, können die einzelnen Pixelwerte als diffuse Reflektanz verstanden werden. Aus dieser können bei uniformer Beleuchtung und gegebener (isotroper) Einfach-Streu-Albedo ($\Lambda' = \frac{\sigma'_s}{\sigma_\alpha + \sigma'_s}$) der verminderte Schwächungskoeffizient σ'_t berechnet werden. Dazu muss die BSSRDF reparametrisiert werden. Bei uniformer Beleuchtung lässt sich die BSSRDF über die Oberfläche integrieren [45]. Auch lässt sich dann die totale diffuse Reflektanz durch das Integral aller diffusen Reflektanzen für ein Material bilden:

$$R_{d} = 2\pi \int_{0}^{\infty} R_{d}(r) \, dr = \frac{\Lambda'}{2} (1 + e^{-\frac{4}{3}A\sqrt{3(1-\Lambda')}}) e^{-\sqrt{3(1-\Lambda')}}$$
(5.1)

Um nun von einem konkreten Pixelwert auf eine zugehörige Einfach-Streu-Albedo schließen zu können, muss Gleichung (5.1) nach Λ' umgestellt werden. Da dies analytisch aber nicht ohne weiteres möglich ist, wird hierfür eine numerische Lösung genutzt. Listing 2 stellt dafür eine Möglichkeit mittels Sage bzw. NumPy und SciPy dar. Die Berechnung ist der Matlab-Version von Hery [35] nachempfunden.

Das Ergebnis ist eine linear interpolierte Look-Up-Tabelle mit 2001 Einträgen. Um daraus von Bildwerten c im Intervall [0, 1] die Einfach-Streu-Albedo zu bekommen (beispielsweise in einem Shader), bedarf es lediglich einem Nachschlagen in der Tabelle bei Index floor(c * 2000.0). Alternativ kann damit auch eine Albedo-Karte erstellt werden, welche dann bei der Bildberechnung eingesetzt werden kann.

Neben dem Einfach-Streu-Albedo bedarf es nur noch l_d um das Ergebnis zu steuern. Dieser Parameter ist deutlich besser anzupassen. Da der Absorptionsgrad von Schnee bekannt ist, kann dieser außerdem als festgelegt betrachtet und darauf aufbauend σ'_s berechnet werden: $\sigma'_s = \frac{\Lambda'\sigma_a}{1-\Lambda'}$. So ist es möglich aus vorhandenen Schneebildern benutzbare Koeffizienten zu gewinnen (die aber nicht physikalisch begründet sind). Informationen über die Struktur können ebenfalls aus den Bilddaten extrahiert werden. Damit sind genug Informationen für die Parametertexturen vorhanden.

Auf diesem Weg gewonnene Koeffizienten schienen in den durchgeführten Experimenten sehr sensibel gegenüber Veränderungen im Licht. Sofern ein ähnliches Licht wie im Ausgangsbild verwendet wurde—hier diffuses Himmelslicht—konnte der gewünschte Farbwert häufig reproduziert werden. Für Szenen in denen jedoch Transmission eine wichtige Rolle spielt (z. B. durch im Schnee platzierte Lichtquellen), versagten die Parameter aber. Die ermittelten Werte waren immer deutlich zu gering.

Da das Spektrum an Parametern so groß sein kann, wird in der Implementierung das OpenEXR-Dateiformat genutzt. Zusätzlich macht es das Format einfach ohne weiteres lineare Werte abspeichern zu können.

5.3.3 Modellierung mittels BRDFs

In die implementierten Vielfachstreuungsmethoden kann grundsätzlich die Oberflächenstruktur auch durch eine BRDF beschrieben werden. Die Oberfläche des Mediums ist durch eine oder mehrere Randbedingungen beschrieben, entsprechend muss diese angepasst werden. Donner und Jensen [22] beschreiben dazu dass der FRESNEL-Term F_{dr} in Randbedingung (4.21) durch eine diffuse BRDF ersetzt werden soll. Für das Dipolmodell ist dies analog dazu ebenfalls möglich. F_{dr} beschreibt das Verhältnis von Reflexion und Transmission an einer plan-parallelen Oberfläche. Wie in [22] demonstriert könnte ein Mikrofasettenmodell wie die COOK-TORRANCE-BRDF auch hier die feine Rauheit einer Schneeoberfläche beschreiben. Auch ist der Einsatz von schneespezifischen Oberflächenmodellen wie Doziers BRDF [39] klingt vielversprechend.

Um F_{dr} ersetzen zu können, kann die BRDF f_r nicht direkt genutzt werden—es geht schließlich um die *diffuse* Reflektanz. Somit wird ein diffuser Reflektanzfactor r_d entweder analytisch gebildet oder mittels Monte-Carlo-Integration (wie für Соок-Торкансе nötig) bestimmt. Damit kann A in den Berechnungen für den Abstand zur virtuellen Punktlichtquelle in den Di- und Multipolmodellen ermittelt werden:

$$A = \frac{1 + r_d}{1 - r_d}.$$

Damit F_{dr} auch in der (diffusen) BSSRDF, Gl. (4.19), entsprechend angepasst werden kann, muss die diffuse Transmission r_{dt} ermittelt werden [22]:

$$r_{\mathrm{dt}}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{\mathrm{o}}) = 1.0 - \int_{2\pi} f_{\mathrm{r}}(\mathbf{x}, \vec{\omega}_{\mathrm{o}}, \vec{\omega}_{\mathrm{i}}) (\vec{\omega}_{\mathrm{i}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \, \mathrm{d}\omega_{\mathrm{i}}$$

Somit stellt sich die BSSRDF dann folgendermaßen dar:

$$S_{d}(\mathbf{x}_{i}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i}, \mathbf{x}_{o}, \hat{\boldsymbol{\omega}}_{o}) = \frac{1}{\pi} r_{dt} \mathbf{x}_{i} \hat{\boldsymbol{\omega}}_{i} \mathbf{R}(||\mathbf{x}_{i} - \mathbf{x}_{o}||) r_{dt} \mathbf{x}_{o} \hat{\boldsymbol{\omega}}_{o}$$

Zusätzlich zu diesem diffusen Anteil kommt noch der durch die BRDF reflektierte Anteil an der Oberfläche. Beides zusammen ergibt dann das gesamte Modell. Die Implementierung ermöglicht den Einsatz des Mikrofacettenmodell von Walter et al. [83]. Dieses wurde bereits von Mitsuba angeboten und ermöglichte daher eine einfache Verwendung. Die BSSRDF-Berechnung wurde entsprechend den eben beschriebenen notwendigen Veränderungen angepasst. Dazu wird die BRDF bei der Initialisierung der BSSRDF für verschiedene Eingangsrichtungen numerisch integriert und tabellarisch gespeichert. Leider konnte aber mit den angepassten Reflektanz- und Transmissionskoeffizienten keine Verbesserung der Ergebnisse festgestellt werden. Im Gegenteil verlor die Szene an Plausibilität. Ein Implementierungsfehler ist hier aber nicht auszuschließen und so bedarf es dazu weiterer Untersuchungen. Nutzt man ein Mikrofacettenmodell aber als zusätzliche Komponente (ohne die Reflektanz und Transmission der BSSRDF zu beeinflussen), können so vor allem Glanzpunkte erzeugt werden. In Abb. 23 ist ein Ergebnis unter Verwendung dieses Modells dargestellt.

5.4 VOLUMENSTREUUNG

In der Implementierung sind verschiedene Methoden zur Berechnung der Einfach- und Vielfachstreuung enthalten. Zum Teil konnten in Mitsuba bestehende Techniken genutzt und erweitert werden. Entsprechend orientiert sich die Einbindung neuer und die Veränderung bestehender Klassen an der existierender Architektur. An PBRT [67] angelehnt, gibt es eine Reihe von Integratoren, die das Strahlungsfeld berechnen. An einem Oberflächenpunkt werden BSDF² und, sofern vorhanden, die BSSRDF ausgewertet.

Das häufig eingesetzte Dipol-Diffusionsmodell von Jensen und Buhler [44] war bereits verfügbar. Das Verfahren wie auch die Implementierung benutzen eine Octree-Datenstruktur um die Auswertung des Flächenintegrals aus Gleichung (1.11) zu beschleunigen. In diesem werden die Bestrahlungsstärken an Stichproben auf der Oberfläche eingetragen. Dadurch wird die Berechnung der Bestrahlungsstärke und den Streuvorgängen innerhalb des Materials entkoppelt [44]. Daraus ergibt sich ein großer Geschwindigkeitsgewinn, denn zur Auswertung der Diffusionsannäherung kann eine hierarchische Integration der Umgebung genutzt werden. Für eine Szene mit der Fläche A sind $A/(\pi l_s^2)$ gleichverteilte Stichproben notwendig [44]. Bei den berechneten Szenen stellte sich jedoch heraus, dass mehr Stichproben notwendig sind um keine Artefakte zu erhalten. Gute Erfahrungen wurden mit dem dem sechsfachen Wert gemacht.

Jeder implementierte Algorithmus besitzt verschiedene Parameter um die Streu- und Absorptionsvorgänge zu beschreiben. Auf diese wird in den folgenden Abschnitten kurz eingegangen. In Abb. 15 ist eine Übersicht der verschiedenen Optionen zu den verfügbaren Berechnungsmethoden dargestellt.

5.4.1 Echtzeitdiffusion

Die Simulation mittels Diffusionsapproximation bedarf einiger Berechnungsschritte und vor allem eine Integration über die Umgebung. Durch die massive Parallelisierung in Grafikkarten kann ein Fragment³ nicht direkt auf die benachbarten Oberflächenpunkte zugreifen. Eine Berechnung der Bestrahlungsstärke, und damit den Einfluss auf das aktuelle Fragment, in der Umgebung ist somit nicht unmittelbar möglich. Daher ist die verwendete Echtzeitberechnung von Shah et al. [72] ein mehrstufiger Prozess.

Die Implementierung ist mit GLSL⁴ realisiert und baut auf Shadercode von Sébastien Hillaire [36] auf. Vier Renderdurchgänge sind notwen-

² Eine BSDF ist die Kombination von BRDF und BTDF, den bidirektionalen Reflektanzbzw. Transimissionsverteilungsfunktionen.

³ Ein Fragment beschreibt ein Pixel welches *möglicherweise* in das Ergebnisbild schafft. Effekte wie Verdeckung oder Transparenz haben darauf Einfluss.

⁴ GLSL ist die Kurzform für "OpenGL Shading Language", eine Programmiersprache um Programme (Shader) auf der Grafikkarte auszuführen.
dig um ein Bild zu erzeugen. Um die Ergebnisse einzelner Durchgänge in eine oder mehreren Texturen zu speichern, werden Framebuffer-Objekte (FBO) genutzt. Implementiert wurde nur der Umgang mit Spotund Richtungslichtquellen. Shah et al. [72] stellen aber weiterhin dar wie auf Basis von Kugelflächenfunktionen auch Umgebungslicht berücksichtigt werden kann.

Als Vorberechnung wird das Diffusionsprofil der aktuellen Schneekonfiguration ermittelt und als 1D-Textur hinterlegt. Der erste Eintrag stellt dabei $R_d(0)$ dar, der letzte hingegen $R_d(r_{max})$. Abschnitt 5.5 wird näher auf die Ermittlung von r_{max} eingehen. Die Implementierung bietet weitere Beispiele wie Wachs zum Vergleich an.

Im ersten Durchgang wird ein transluzentes Objekt, hier die Schneedecke, aus Sicht der Lichtquelle dargestellt. Die Positionen der von dieser aus sichtbaren Oberflächenpunkte werden in eine Textur, einem "Color Attachment" eines FBO, geschrieben. Später stellen diese Punkte die Positionen der Splats dar. Die Auflösung dieser Schattenkarte bestimmt die maximale Anzahl an Splats. Jedes Pixel der Ergebnistextur stellt einen solchen dar. Neben der Position wird in einer zweiten Textur die "Splat-Farbe" C_s gespeichert. Die auftreffende Bestrahlungsstärke wird nach dem LAMBERTSchen Gesetz ermittelt und mit dem Wert einer Albedo-Textur moduliert: $C_s = L \cdot \cos \theta \cdot a$. Im einfachsten Fall ist a =1, aber es kann damit auch Variation in die Reflektanz der Oberfläche gebracht werden. Die Implementierung erlaubt die automatische Verwendung der Wiscombe-Warren-Albedo mittels Gleichung (4.4), einer festen Albedo von a = 1 und das Laden eine benutzerdefinierten Albedo-Karte. Die Albedo geht beim Finder der Punkte x_i und x_o (siehe Abschnitt 4.2.6) ein. Durch Ungenauigkeiten kommt es jedoch schnell zur "Unterbelichtung" [36]. Das Problem ist auch d'Eon [21] aufgefallen und so empfehlen beide dieses zu reduzieren indem eine Albedotextur genutzt wird, die die quadrierten Werte enthält.

Beim Erstellen der Ergebnistextur werden außerdem der Hintergrund und sich im Vordergrund befindliche andere Objekte eindeutig gekennzeichnet. Somit werden nicht sichtbare bzw. verdeckte Stellen nicht mit berechnet.

Der Ansatz von Shah et al. [72] sieht eigentlich dieselbe Größe der x_i - und x_o -Karte vor. Hillaire [36] schlägt jedoch vor diese Beschränkung aufzuheben. Die Anzahl der zu zeichnenden Splats kann schnell sehr hoch werden, der Aufwand die darauf enststehenden Quadrate zu zeichnen wird zu groß. Entkoppelt man die Menge an Splats von der Auflösung in der sich gezeichnet werden, können deutlich höhere Bildraten erzeugt werden. Dabei können jedoch Artefakte entstehen: an den Silhouettengrenzen können einzelne Texturelemente sichtbar werden. Für einfache Objekte stellt dies in den meisten Fällen kein Problem dar, bei den getesteten Objekten waren die Grenzen einiger Splats aber klar erkennbar. Um dies zu kompensieren wurde von Hillaire [36] vorgeschlagen, die Silhouette in der Karte der sichtbaren Punkte x_o im Nachhinein etwas zu vergrößern. Der sogenannte Edge-ExpansionSchritt wird direkt nach dem Erstellen der x_o -Karte ausgeführt und lässt die Artefakte weitgehend verschwinden.

Jeder Splat wird anschließend, wie in Abschnitt 4.2.6 dargestellt, als Quadrat gerendert und mit additivem Alpha-Mischen in der Vielfachstreuungstextur gespeichert. Um die Quadrate im Kameraraum darstellen zu können, wird jeder Ursprung x_i vier mal gerendert, jedoch jedes mal mit einem anderen Vertexattribut. Dieses gibt die für den aktuellen Punkt notwendige Verschiebung (NW, NO, SO, SW) an. Im Shader geschieht dann die eigentliche Berechnung der Eckkoordinaten. Um auch eine Albedo-Berechnung nach Wiscombe und Warren [84] zu ermöglichen, wurde ein separates Fragmentprogramm erstellt und bei Bedarf verwendet. Für eine Unterscheidung welche Albedo-Methode genutzt wird, ist der Shader selbst auf Effizienzgründen der falsche Ort. Die danach entstandene Vielfachstreuungstextur wird als letzter Schritt auf das transluzente Objekt projiziert. Die in der Implementierung angebotenen Parameter sind in Abb. 15 (c) dargestellt.

5.4.2 Multipolannäherung

Die von Donner und Jensen [22] veröffentlichte Multipolannäherung wurde bereits in Abschnitt 4.2.4 erläutert. Implementiert wurde eben dieser Teil und die in der Veröffentlichung dargestellte Faltung der Parameter mehrerer Schichten wird außer Acht gelassen. Das bedeutet, dass Schnee von ein und demselben Medium umgeben sein muss wenn es nicht optisch dick ist. Durchscheinende Böden oder Wasser ist somit in der Implementierung nicht möglich.

Um Vielfachstreuung durch die Multipolannäherung zu beschreiben, kann eine Schichtdicke und eine gewünschte Anzahl von Dipolen (mindestens einer) bestimmt werden. Wie auch die Dipolannäherung, stehen die üblichen Streuparameter zur Verfügung und die Möglichkeit eine Look-Up-Tabelle für R_d und T_d zu nutzen, ist gegeben. Diese und weite Einstellmöglichkeiten sind in Abbildung 15 (d) dargestellt.

Für die Transmittanz gilt zu beachten, dass diese nach Gleichung (4.25) auch negative Werte annehmen kann. Da dies nicht der tatsächlichen Diffusion entspricht, werden keine Werte kleiner Null für R_d erlaubt. Alle Vorkommen werden durch Null ersetzt.

5.5 BESCHLEUNIGUNGSVERFAHREN

Um einen weiteren Geschwindigkeitsgewinn zu erhalten, konnten an verschiedenen Stellen Beschleunigungsstrukturen eingesetzt werden. Die auf der Diffusionsapproximation basierten Verfahren ermöglichen es die diffuse Reflektanz R_d auf der Oberfläche vorzuberechnen und zu tabellieren. Sie ist allein von der Entfernung r zwischen dem Oberflächenpunkt von Interesse und dem Eintrittspunkt des Lichtstrahls. Während der Traversierung des Bestrahlungsstärken-Octrees aus [44] wird

 R_d häufig benötigt, gerade bei den häufigen Streuvorgängen in Schnee macht sich dies bemerkbar.

Eine solche Tabelle ist abhängig von den Größen F_{dr} , σ_a , σ'_s und r_{max} ab. Letzter Wert repräsentiert die maximal definierte Entfernung r dar, für die die Look-Up-Tabelle definiert ist. Die Implementierung erlaubt die numerische Ermittlung von r_{max} über eine Monte-Carlo-Integration. Nach Shah et al. [72] muss dazu der Fehler zwischen R_d integriert über die gesamte Fläche A und R_d integriert über die durch r_{max} begrenzte Fläche $A' = r_{max}^2$ kleiner als ein definierter Fehler ε sein:

$$\frac{\int_{A} R_{d}(r) dA - \int_{A'} R_{d}(r) dA'}{\int_{A} R_{d}(r) dA} < \varepsilon.$$
(5.2)

Die Berechnung beider Integrale benötigte in den verwendeten Beispielszenen relativ viel Zeit. Vor allem für stark streuenden Schnee (σ_s ist hoch) ist ein Untersuchen verschiedener Konfigurationen erschwert. Auf dem vorhandenen System benötigte die Berechnung von r_{max} mit einer Auflösung von 1mm und 10.000 Monte-Carlo-Iterationen circa 2,1 Minuten. Da sich r_{max} aber nicht sehr stark ändert, kann es recht gut eingegrenzt werden. In den gemachten Tests war r_{max} im sehr großen Teil der Fälle kleiner 10m . Wie in [72] vorgeschlagen, wurde hier ein Fehler von $\varepsilon = 0,01$ zugelassen. Dieses Verfahren wird ebenfalls in der Echtzeitvariante genutzt um die Splat-Größe zu ermitteln.

Das Gefälle des Diffusionprofils ist im gesamten sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums sehr stark; nach weniges Millimetern erreicht es häufig schon nahezu Null. Eine Möglichkeit die Look-Up-Tabelle zu verkleinern, ist es diese mit einer auf die Änderung des Profils adaptiven Auflösung zu erweitern. Dies ließe sich mir einer linearen Funktion realisieren (eine genauere Exponentialfunktion wäre zu rechenaufwändig). Da sich die Anzahl der Einträge für Schnee aber nicht wesentlich über ~ 5,000 (entspricht mm-Auflösung und $r_{max} = 5$) herausbewegen müssen um eine ausreichend gute Auflösung zu bieten, ist Größe kein Problem. Daher beziehen sich die einzelnen Einträge die Look-Up-Tabelle der Implementierung auf äquidistante Entfernungen. Dennoch gilt es die Form des Diffusionprofils zu beachten. Die großen anfänglichen Änderungen zwingen bei der Indexberechnung in der Auswertung zu einer Rundung zur *nächsten* indizierten Entfernung. Ein einfaches Abrunden hat eine deutlich zu hohe Abstrahlung zur Folge.

5.6 **programmoberfläche**

Wie Eingangs erwähnt, stützt sich die Implementierung auf Mitsuba und dessen auf QT basierte Basisoberfläche. Diese wurde erweitert um verschiedene Parameterkonfigurationen für Schnee zu erzeugen und dynamisch entsprechende Szenen zu erstellen. Der Titel der Anwendung leitet sich vom spanischen *el copo* (de nieve), zu Deutsch (Schnee-)Flocke. Mit einer Beispielszene bietet sich der in Abb. 14 dargestellte Anblick der Programmoberfläche. Rechts neben der Szene bieten drei Reiter Einstellungen zu den Szenenelementen, den Schneeparametern und den Darstellungsoptionen. Einzelne Elemente können als Schneeflächen deklariert werden. Änderungen an den Schneeparametern wirken sich dann auf diese Objekte aus. Wie bereits zuvor erwähnt, sind die implementierten Verfahren durch die in Abb. 15 dargestellten Steuerelemente konfigurierbar. Zudem kann das anisotrope Dipolmodell von Jakob et al. [42] verwendet werden. Leider waren die damit gemachten Tests nicht erfolgreich, wobei es sich dabei jedoch vermutlich um ein Implementierungsproblem handelt, als um ein grundsätzliches.

Über die Möglichkeit die Korngröße, die Dichte und den Brechungsindex einzustellen, lassen sich nach den Zusammenhängen von Bohren und Barkstrom, der allg. geoemetrischen Optik und dem SnowPack-Modell verschiedene Streuparameter berechnen. Der Anistropiefaktor ist einstellbar und eigene Absorptions- und Streuparameter können verwendet werden. Konfigurationen für Neuschnee, bereits länger liegenden und schmelzenden Schnee sind alternativ anwählbar.

Hspans1 = Header, 3 * RanLine, 4 * VecLine, {Comment}, {SpanLine1}; Hspans2 = Header, 3 * RanLine, 4 * VecLine, {Comment}, {SpanLine2}; Hspans3 = Header, 7 * RanLine, 4 * VecLine, {Comment}, {SpanLine3}; Header = {Comment}, Width, WS, Height, NewLine; Width = Int; Height = Int; RanLine = {Char}, NewLine; Comment = "#", {RanLine}; VecLine = {Char}, ":", Vector, NewLine; SpanLine1 = Int, WS, Int, WS, Element1, {Element1}, NewLine; SpanLine2 = Int, WS, Int, WS, Element2, {Element2}, NewLine; SpanLine3 = Int, WS, Int, WS, Element3, {Element3}, NewLine; Element1 = Real, Real, Int; Element2 = Real, Real, 8 * Int; Element3 = Real, Int, 3 * Real, 8 * Int; Vector = Real, WS, Real, WS, Real; Real = Int | (Int, ".", Int); Int = Digit1, { Digit0 }; Digit0 = "0"| Digit1; = "1" | "2" | "3" | "4" | "5" | Digit1 "6" | "7" | "8" | "9"; Char = ? alle sichtbaren Zeichen ?; = " " | \t; WS NewLine = $\n;$

Listing 1: ISO 14977 EBNF für hspan-Dateiformate

```
Listing 2: Look-Up-Table der Umkehrfunktion von Gleichung 5.1
from scipy.interpolate import interpld
import numpy as np

def alphaPrime(eta):
   Fdr = -1.440/(eta * eta) + 0.710/eta + 0.668 \
        + 0.0636*eta
   A = (1 + Fdr) / (1 - Fdr)

   alphaP = np.arange(0, 1.01, 0.01)
   term1 = (1 + np.exp(-(4.0/3.0) * A \
            * np.sqrt(3 * (1 - alphaP))))
   term2 = np.exp(-np.sqrt(3 * (1 - alphaP)))
   dr = alphaP * term1 * term2

   Rd = interpld(dr, alphaP, kind='linear')
   return Rd(np.arange(0, 2.001, 0.001))
```



Abbildung 14: Die Oberfläche der auf Mitsuba [41] basierenden Ergebnisanwendung.



Abbildung 15: Einstellmöglichkeiten der verschiedenen Verfahren (Rendering-Reiter in Anwendung).

6

In Kapitel 5 wurde dargestellt, welche Modelle in der Implementierung vorhanden sind und auf manche für die Implementierung relevanten Details hingewiesen. Nun sollen die Ergebnisse der unterschiedlichen Ansätze dargestellt und beschrieben werden. Schnee ist in vielerlei Hinsicht ein komplexes Medium. Die optischen Eigenschaften sind häufig nicht konstant in der Schneedecke (vor allem im Bezug auf die Tiefe) und eine sehr ausgeprägte Vorwärtsstreuung macht die Verwendung der häufig genutzten Diffusionsapproximation problematisch [29]. Viele kleine Variationen in der Oberfläche erschweren die Erzeugung physikalisch plausibler Bilder, jedoch ist Schnee verhältnismäßig tolerant gegenüber dem Entstehen von Bildrauschen durch eine zu geringe Anzahl an Stichproben. Aufgrund der sehr geringen (aber selektiven) Absorption und der sehr starken Streuung legt das Licht große Strecken in einer Schneedecke zurück. Das macht einige Berechnungen sehr aufwendig. Mit einer großen Anzahl an Streuereignissen geht eine kleine mittlere freie Weglänge einher.

Für eine beschleunigte Auswertung der verschiedenen Dipolmodelle werden häufig die in Abschnitt 5.4 dargestellten Baumstrukturen zum Speichern der Bestrahlungsstärke verwendet. Jensen und Buhler [44] beschrieben eine hierarchische Auswertung einer Octree-Struktur. Die Anzahl der Stichproben wächst jedoch quadratisch mit dem reduzierten Schwächungskoeffizienten $\sigma'_t = \sigma'_s + \sigma_a$. Nach den meisten Berechnungsarten ist σ'_s sehr hoch.

6.1 TESTSZENEN

Um die Interaktion von Licht und Schnee an konkreten Beispielen darzustellen, wurden drei Testszenen gewählt. Eine davon hat Sonnenlicht als Lichtquelle und in den anderen beiden wird das Licht durch "künstliche" Quellen erzeugt. Sofern nicht anders angegeben, wurde eine Auflösung von 1024 × 1024 Pixel für die erzeugten Bilder gewählt. Zum Teil wurden die Bilder aber im Nachhinein zur besseren Vergleichbarkeit an den Rändern beschnitten.

Die verwendeten Berechnungsmethoden beziehen sich auf den Schwächungskoeffizient σ_t und den Streukoeffizient σ_s . Der Absorptionskoeffizient σ_a ist aber bei bleibenden Schneeparametern derselbe und berechnet sich nach Gl. (3.3). Nachfolgend ist σ_a für Neu- und Altschnee in Form eines RGB-Tupels dargestellt.

Neuschnee:
$$\sigma_a = (0.0500, 0.0066, 0.0038) \frac{1}{m}$$

Altschnee: $\sigma_a = (0.3215, 0.0427, 0.0247) \frac{1}{m}$

	Methode	Gl.	σs	σ'_{s}
Neuschnee	Geom. Optik	(1.4)	$ \left(\begin{array}{c} 2290,0\\ 2290,0\\ 2290,0 \end{array}\right) $	$ \left(\begin{array}{c} 503,8\\ 503,8\\ 503,8 \end{array}\right) $
	Bohren & Barkstrom	(3.5)	$\left(\begin{array}{c} 1733,4\\1725,8\\1738,3\end{array}\right)$	$ \left(\begin{array}{c} 381,4\\ 379,7\\ 382,4 \end{array}\right) $
	SnowPack / SLF	(3.7)	$\left(\begin{array}{c}168,0\\168,2\\168,2\end{array}\right)$	$ \left(\begin{array}{c} 36,96\\ 36,69\\ 36,69\\ 36,69 \end{array}\right) $
Altschnee	Geom. Optik	(1.4)	$\left(\begin{array}{c} 735,7\\736,0\\736,0\end{array}\right)$	$ \left(\begin{array}{c} 161,9\\ 162,0\\ 162,0 \end{array}\right) $
	Bohren & Barkstrom	(3.5)	$\left(\begin{array}{c} 556,1\\ 556,9\\ 556,7\end{array}\right)$	$ \left(\begin{array}{c} 122,4\\ 122,5\\ 122,5 \end{array}\right) $
	SnowPack / SLF	(3.7)	$ \left(\begin{array}{c} 339,4\\ 340,7\\ 340,8 \end{array}\right) $	$ \left(\begin{array}{c} 74,7\\ 75,0\\ 75,0 \end{array}\right) $

Tabelle 8: Die verschiedenen für die Testszenen verwendeten Koeffizienten um Neuschnee und bereits länger liegender Schnee darzustellen.

Die deutlich stärkere Absorption im grünen und vor allem roten Bereich ist deutlich zu erkennen. Diese ist zusammen mit den den langen Wegen von Licht in Schnee und Eis verantwortlich für deren bläuliche Färbung. Der Streuungskoeffizient variiert jedoch zum Teil sehr stark. Tabelle 8 stellt diesen und dessen reduzierte (isotrop skalierte) Variante als RGB-Vektor dar.

Die gemessenen Zeiten beziehen sich auf ein Intel Core 2 Duo (E6750) 2,66GHz GNU/Linux-System mit 4GB Arbeitsspeicher und einer Nvidia GeForce 8800 GT Grafikkarte.

Im Folgenden wird auf die einzelnen Szenen kurz eingegangen und ihre Ergebnisbilder dargestellt. Nicht jede Methode konnte auf jede Szene angewendet werden, daher tauchen nicht immer alle Verfahren in den Vergleichen auf.

6.1.1 Testszene 1: Lichterkette im Schnee

Mit einer Fotografie von Chris Hendricks [34] ist ein interessantes Beispiel für die Vielfachstreuung in Schnee entstanden. Das in Abbildung 16 dargestellte Bild zeigt eine mit 15–20cm Schnee bedeckten Lichterkette. Die (optischen) Eigenschaften des tatsächlich vorhandenen Schnees sind nicht bekannt und so wurden die synthetischen Bilder mit den Parametern für Neuschnee und bereits länger liegende Schneedecken erzeugt. Es wurde eine Korngröße von 0, 3mm , eine Dichte von 70kg \cdot m⁻³ und ein Anisotropiefaktor von 0, 78 angenommen. Es wurde jedoch nicht versucht die Originalszene 1:1 nachzustellen. Infolgedessen sind die Lichtquellen *etwas* größer und damit weniger als im Original. Auch wurde der geschmolzene Bereich *über* den einzelnen Lampen (im Original wurden Glühlampen verwendet) nicht modelliert.

Die synthetische Berechnung eines vergleichbaren Bildes war nur mittels Dipol- und Multipolmodell möglich. Der Echtzeitansatz wurde nur für einen gerichteten Strahler implementiert und konnte daher nicht für diese Szene verwendet werden. Grundsätzlich ist die Verwendung der Echtzeitdiffusion nach Shah et al. [72] aber auch hier möglich. Das in ihrer Herleitung zwar Vielfachstreuung berücksichtigendn Modell von Wiscombe und Warren bietet in der Form jedoch keine Möglichkeit die für die Szene notwendige Transmission darzustellen. Es ließe sich aber dahingehend erweitern. Das Hanrahan-Krueger-Modell kennt Transmission, jedoch nur für Einfachstreuung. Dazu war die Schneedecke jedoch zu dick und so kam bei Verwendung dieses Modells kein Licht hindurch.

Der in den Diffusionsmodellen benutzte Bestrahlungsstärken-Octree ist für diese Szene recht groß und bedarf einige Zeit zum Aufbau. Mit einer Fläche von A $\approx 30, 8m^2$ und $\sigma_t \approx 1430 \frac{1}{m}$ bedarf es somit nach $\frac{A}{\pi}\sigma_t^2$ (siehe Abschnitt 5.4) und der Bohren-Barkstrom-Berechnung für Neuschnee insgesamt 20.048.087 Stichproben. Diese werden gleichverteilt auf der Oberfläche generiert. Diese hohe Zahl führt zu einem hohen Speicherverbrauch des Bestrahlungsstärken-Octrees.

Abbildung 17 zeigt das Ergebnis einer Berechnung von Neuschnee mitteln Dipol-Diffusionsmodell. Trotz der Verwendung der Beschleunigungsstruktur ist, wie Tabelle 9 zeigt, die Renderzeit mit etwa 1,7h sehr hoch. In dieser Tabelle ist eine Übersicht der im einzelnen verwendeten Berechnungsarten und deren Ergebnisse für diese Szene dargestellt. Auch hier ist deutlich zu erkennen, dass ein großer Unterschied zwischen der Berechnung mit Dipol und Multipol sowie zwischen den Einzelnen Berechnungsarten der Streuung existiert. Ausschnitte entsprechender Bilder sind in Abbildung 18 dargestellt.

Da der Dynamikbereich der Ergebnisbilder zu hoch für Bildschirm und Druck ist, wurde ein *Tone-Mapping*-Verfahren verwendet um alle Werte abbilden zu können. Eine unterschiedliche Parametrisierung dieses Verfahren ist die Ursache für die unterschiedliche Erscheinung von Abb. 17 und Abb. 18 trotz sonst gleicher Konfiguration. Entsprechend wurde dafür (hier eine einfache Gamma-Anpassung) eine Konfiguration gesucht die den Dynamikbereich der Ergebnisbilder gut abdeckt (hier $\gamma = 4,02$). Überraschenderweise gibt es nämlich große Helligkeitsunterschiede zwischen Dipol- und Multipoldiffusion.

In der Szene kommt ausschließlich transmittiertes Licht beim Betrachter an. Laut Donner und Jensen [22] unterschätzt die Dipolapproximation die Menge an transmittiertem Licht in der sehr nahen Umgebung von x_i . Nach weniger Millimetern dreht sich dieses Verhältnis aber um und der Dipol überschätzt die Menge an Licht. Durch die starke Streuung von Schnee summieren sich diese Anteile stark auf, denn die sehr hohe (Vorwärts-)Streuung ist nicht außer acht zu lassen; samt geringer Absorption und somit hoher Eindringtiefe von Licht in Schnee. Damit muss von entsprechend mehr Oberflächenpunkten die Bestrahlungsstärke einbezogen werden. Das Integral aus Gleichung (4.20) ist somit im Allgemeinen recht groß. Überraschend ist also, dass die im Dipolmodell

Methode	Schneetyp	Abb.	ParamTyp	Renderzeit
Dipol	Neuschnee	17	geom. Opt.	1,76h
Dipol	Neuschnee	18 (g)	Bohren [12]	1,70h
Dipol	Neuschnee	18 (k)	SLF [54]	1,23h
Dipol	Länger liegend	18 (d)	geom. Opt.	1,39h
Dipol	Länger liegend	18 (h)	Bohren [12]	1,34h
Dipol	Länger liegend	18 (l)	SLF [54]	1,19h
Multipol	Neuschnee	18 (a)	geom. Opt.	2,95h
Multipol	Neuschnee	18 (e)	Bohren [12]	2,30h
Multipol	Neuschnee	18 (i)	SLF [54]	1,72h
Multipol	Länger liegend	18 (b)	geom. Opt.	2,16h
Multipol	Länger liegend	18 (f)	Bohren [12]	1 <i>,</i> 94h
Multipol	Länger liegend	18 (j)	SLF [54]	1,75h

Tabelle 9: Vergleich verschiedener Berechnungen für die 1. Testszene (Lichterkette) in einer Auflösung von je 1024×1024 .

deutlich weiter gestreute transmittierte Strahlung verantwortlich zu sein scheint für eine höhere Gesamtabstrahlung. Eine längere Belichtungszeit der Bilder unterstützt diese Annahme, da das Licht im Dipolmodell deutlich weiter entfernte Teile der Szene erreicht. Im Abschnitt 6.2 wird darauf noch näher eingegangen.

Zur Berechnung von Bild 17 wurde dennoch die Dipolvariante gewählt. Ihr Gesamteindruck mit angepassten Tone-Mapping-Parametern erschien realistischer. Denn nebst der unterschiedlichen Abstrahlung, tendiert das Multipolmodell dazu die eigentliche Geometrie zu betonen. Bedingt durch den Einfluss der Oberflächennormale in Gl. (4.26) sind einzelne Flächen erkennbar. Abbildungen 18 (i) und (j) machen dies anschaulich (Multipol, Neu- und Altschnee, SnowPack).



Abbildung 16: Eine mit Schnee bedeckte Lichterkette, von [34]



Abbildung 17: Synthese einer von Schnee bedeckten Lichterkette, visualisiert mittels Dipol-Diffusion.



Abbildung 18: Verschiedene Schneeparameter für Testszene 1 im Vergleich. Obere zwei Reihen: Multipol, Untere zwei Reihen: Dipol. Je die obere Reihe stellt Neuschnee dar, die untere länger liegenden feuchten Schnee. Erste Spalte: σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet.

6.1.2 Testszene 2: Topfpflanze

Eine von [79] stammende, mit Schnee bedeckte Topfpflanze wurde als weitere Testszene gewählt. Abbildung 19 zeigt einen Blick auf diese mit Tageslichtbeleuchtung. Im Bild ist der Hintergrund durch den Horizont in zwei Bereiche geteilt: Himmel und "Boden". Da dem Bild keine wirkliche Szene unterliegt, kann kein direkter Vergleich zur Realität gezogen werden. Die Grundfläche hat ein Ausmaß von etwa $1m \times 1,7m$.

Wie schon im Bezug auf die Lichterketten-Szene erwähnt, neigt das Multipolmodell im Verglich zum Dipolmodell dazu die Geometrie der Oberfläche herauszustellen. In der höher aufgelösten Abb. 21 (b) wird dies deutlich. Bei einer solchen Nähe trägt dieser Effekt nicht zur Realitätsnähe bei. Ab einer gewissen Entfernung kann er dies aber sehr wohl und so bringt er z. B. für Abb. 22 (a) den Eindruck einer körnigeren Oberfläche mit sich. Im Umkehrschluss könnte also auch für die Detailabbildung 21 (b) eine deutlich höher aufgelöste Geometrie verwendet werden. Bedingt durch die dazu notwendige Größe des Gitternetzes wurde dies hier aber nicht getan.

In Tabelle 10 ist eine Übersicht der einzelnen Berechnungsarten und der dafür notwendigen Berechnungszeit dargestellt. Da durch die kleinere Oberfläche deutlich weniger Bestrahlungsstärkenstichproben notwendig sind, ist die Berechnungszeit für Dipol- und Multipoldiffusion etwas geringer als in Szene 1. Da die Szene nicht in dem Maße wie Szene 1 und 3 auf Transmission aufbaut, kann auch das Hanrahan-Krueger-Modell (HK) und die Warren-Wiscombe-BRDF (WW) zum Vergleich herangezogen werden. Das HK-Modell wurde für Abb. 20 verwendet. Zwei Dinge fallen sofort ins Auge: Das BSSRDF-Modell (Multipoldiffusion) verwischt im Vergleich zu den BRDF-Modellen sehr stark die Oberflächenbeschaffenheit und ist scheinbar dunkler. Dass die Oberflächenstruktur weniger deutlich zu erkennen ist, ist ein gewünschter Effekt. Schließlich ist es unter anderem das was eine Vielfachstreuung bewirkt: Mehr Strahlung dringt weiter ins Innere und somit auch an anderen Stellen wieder an die Oberfläche zurück. Auf diesem Weg gehen Schattierungen verloren und der Eindruck der Oberflächenbeschaffenheit verschwimmt. Ähnlich auffällig ist die dunklere Tönung der Pflanze und deren Topf. Der Grund dafür ist die höhere Abstrahlung der BSSRDF-Oberfläche, die BRDF-Oberflächen absorbieren offenbar mehr Licht. Damit muss die Belichtungszeit beim BRDF-Modell länger sein um eine schneetypische Helligkeit zu erreichen. Das hat auch zur Folge, dass andere Szenenelemente heller dargestellt werden. Sollte beides mit denselben Tone-Mapping-Parametern dargestellt werden, würde entweder das eine zu hell oder das andere zu dunkel erscheinen. Die Diskussion in Abschnitt 6.2 wird dies noch etwas weiter ausführen.

Das WW- und das HK-Modell können auch problemlos in Echtzeitumgebungen eingesetzt werden. Eine Shaderimplementierung ist ohne weiteres möglich und steht in der Implementierung auch zur Verfügung.

Methode	Schneetyp	Abb.	ParamTyp	Renderzeit
Dipol	Neuschnee	22 (c)	geom. Opt.	59,95min
Dipol	Neuschnee	22 (g)	Bohren [12]	55,87min
Dipol	Neuschnee	22 (k)	SLF [54]	39,97min
Dipol	Länger liegend	22 (d)	geom. Opt.	49,98min
Dipol	Länger liegend	22 (h)	Bohren [12]	47,81min
Dipol	Länger liegend	22 (l)	SLF [54]	44,07min
Multipol	Neuschnee	22 (a)	geom. Opt.	71,40min
Multipol	Neuschnee	22 (e)	Bohren [12]	66,00min
Multipol	Neuschnee	22 (i)	SLF [54]	42, 82min
Multipol	Länger liegend	19 (b)	geom. Opt.	63,00min
Multipol	Länger liegend	22 (f)	Bohren [12]	56, 29min
Multipol	Länger liegend	22 (j)	SLF [54]	47,31min

Tabelle 10: Vergleich verschiedener Berechnungen für die 2. Testszene (Topfpflanze) in einer Auflösung von je 1024×1024 .

Zeitvergleiche wurden daher nur für Dipol- und Multipoldiffusion angegeben.

Wie in Abschnitt 5.3.3 beschrieben, kann mit Hilfe einer BSP die Oberflächenrauheit beschrieben werden. Zu Versuchszwecken wurde das Mikrofacettenmodell von Walter et al. [83] genutzt um diesen Effekt zu simulieren. Die Verwendung der diffusen Reflektanz der BRDF statt des FRESNEL-Terms in der BSSRDF führte leider zu einigen Artefakten, verursacht, wie sich zuletzt herausstellte, durch ein Implementierungsproblem. Insofern sind weitere Untersuchungen notwendig um die Nützlichkeit einer solchen Oberflächenrauheit für Schnee zu beurteilen. Statt dessen kann aber der spekulare Anteil der BRDF genutzt werden um einen Glitzereffekt zu simulieren. Abb. 23 zeigt das Ergebnis. Es ist ersichtlich, dass dieses Verfahren die Möglichkeit bietet, Glanzpunkte auf der Oberfläche darzustellen. Leider spiegelt sich die Verwendung dieser BSDF auch in der Berechnungszeit wieder: das Bild auf Basis von Dipoldiffusion und Walter-BSDF benötigte in einer Auflösung von 1024×1024 insg. 8, 6h zum Rendern.



Abbildung 19: Eine Topfpflanze mit Schnee, berechnet mit Multipoldiffusion und Einfachstreuung.



Abbildung 20: Eine Topfpflanze mit Schnee, berechnet mit dem Hanrahan-Krueger-Modell für Einfachstreuung und mit Jensens BSSRDF-Annäherung durch eine BRDF.



(b)

Abbildung 21: Ausschnitte mit Blick auf Boden, berechnet (a) mit Dipoldiffusion und Einfachstreuung und (b) durch Multipoldiffusion ohne Einfachstreuung. In letzterem Bild ist das Oberflächennetz deutlich zu erkennen.



Abbildung 22: Verschiedene Schneeparameter für Testszene 2 im Vergleich. Obere zwei Reihen: Multipol, Untere zwei Reihen: Dipol. Je die obere Reihe stellt Neuschnee dar, die untere länger liegenden feuchten Schnee. Erste Spalte: σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet.



Abbildung 23: Eine Topfpflanze mit Neuschnee, berechnet mit Dipoldiffusion und einem Mikrofacettenmodell.

6.1.3 Testszene 3: Schneelicht

Eine weitere Szene die hauptsächlich von der Transmission von Licht durch Schnee lebt, ist die des in Abbildung 25 dargestellten Schneelichts von Chris Järnåker [46]. Diese 30–50cm hohen Schneeballtürme um eine Kerze oder ein Teelicht scheinen im schwedischen Winter weit verbreitet zu sein. Ein ähnlicher Gegenstand wurde modelliert und ist mit den Parametern für älteren Schnee und mittels Multipol-Diffusion dargestellt (Abb. 26). Dabei wurden insgesamt 1001 Dipole verwendet und von einer durchschnittlichen Dicke d von 7cm ausgegangen. An dieser Stelle macht sich schon deutlich, dass eine dynamische Berechnung oder Abstufung der Entfernung zwischen Ein- und Austrittspunkt des Lichts hilfreich sein könnte. Schließlich sind die in Blickrichtung als Rand der Schneebälle wahrnehmbaren Regionen im Originalbild von deutlich mehr Licht durchdrungen als deren Zentrumsbereiche. Dieser Effekt lässt sich aber nur zum Teil mit einer gemittelten Dicke darstellen. Die Beleutung durch eine Kerze wurde mittels der Strahlung eines schwarzen Körpers bei 1900K (Kelvin) simuliert und sollte damit recht nah am Original liegen.

Tabelle 11 zeigt die benötigte Zeit um die einzelnen Bilder mit den verschiedenen Methoden zu berechnen. Die dazu in Abb. 27 dargestellten Detailbilder sind nur Ausschnitte dieser Berechnungen. Die tatsächlichen Bilder haben eine Auflösung von 1024×1024 und sind vergleichbar mit Abb. 26.

Wie auch die Lichterketten-Szene ist das Schneelicht aufwändiger zu berechnen. Die Renderzeiten bewegen sich (fast) alle jenseits einer Stunde. Dabei ist auch hier Neuschnee etwas aufwändiger als bereits länger liegender Schnee; große Unterschiede gibt es vor allem aber zwischen den einzelnen Methoden zur Berechnung der Streuparameter. Je größer die mittlere freie Weglänge, desto kürzer die Renderzeit. Entsprechend gibt es auch große visuelle Unterschiede: Neuschnee lässt deutlich weniger Licht passieren als Altschnee und vor allem die SnowPack-Berechnung führt zu weniger Streuung (wie auch die Parameter zeigen) und damit mehr hindurch gelassenes Licht.

Auch gibt es große Unterschiede zwischen dem Dipol und dem Multipolmodell, in der Berechnungszeit wie auch visuell. Das Dipolmodell geht von einem halbunendlichen Medium aus aus bringt somit mehr Licht zurück an die Oberfläche. Vor allem in sehr dünnen Bereichen, wie sie die Schneebälle an kleinen Erhebungen der Oberfläche bilden, bringt des Dipolmodell dunklere Stellen hervor. Dieser Effekt ist ein Zeichen für die Unterschätzung der Transmission durch das Dipolmodell. Abb. 24 bringt dies gut zum Ausdruck (Dipol, Altschnee, Bohren-Barkstrom-Streumodell). Aber auch in 27 (e) und (i) ist dies zu erkennen (Dipol, Neuschnee, Bohren-Barkstrom- und SnowPack-Streumodell).

Der allgemeine Helligkeitsunterschied zwischen Dipol und Multipol ist dennoch überraschend. Erwartet war, dass die Multipol-Berechnung zu höhere Werten führt. Die Ursache dafür, liegt in dem breiten Einfluss-

Methode	Schneetyp	Abb.	ParamTyp	Renderzeit
Dipol	Neuschnee	27 (c)	geom. Opt.	1,40h
Dipol	Neuschnee	27 (g)	Bohren [12]	1,29h
Dipol	Neuschnee	27 (k)	SLF [54]	1,12h
Dipol	Länger liegend	27 (d)	geom. Opt.	1,40h
Dipol	Länger liegend	27 (h)	Bohren [12]	1,15h
Dipol	Länger liegend	27 (l)	SLF [54]	0 <i>,</i> 99h
Multipol	Neuschnee	27 (a)	geom. Opt.	1,62h
Multipol	Neuschnee	27 (e)	Bohren [12]	1,77h
Multipol	Neuschnee	27 (i)	SLF [54]	1,12h
Multipol	Länger liegend	26	geom. Opt.	1,57h
Multipol	Länger liegend	27 (f)	Bohren [12]	1,43h
Multipol	Länger liegend	27 (j)	SLF [54]	1,15h

Tabelle 11: Vergleich verschiedener Berechnungen für die 3. Testszene (Schneelicht) in einer Auflösung von je 1024×1024 .



Abbildung 24: Mögliche Artefakte bei der Verwendung die Dipolmodells, hier bei Altschnee und Bohren-Barksrtom-Streumodell.

gebiet von Licht auf einen Oberflächenpunkt. Ab wenigen Millimetern ist die Dipolberechnung deutlich größer und die Multipoltransmission verschwindet ganz. Aufsummiert ergibt sich für Schnee somit hier eine höhere Transmission bei Verwendung des Dipolmodells.



Abbildung 25: Ein Schneelicht, von [46]



Abbildung 26: Ein Schneelicht, berechnet mittels Multipol-Diffusion (siehe Text) und Streuparametern nach Gl. (3.5) für bereits länger liegenden Schnee.





(g)

(c)

(d)



Abbildung 27: Verschiedene Schneeparameter für Testszene 3 im Vergleich. Die oberen beiden Reihen wurden mittels Multipol-, die unteren beiden mittels Dipol-Diffusion berechnet. Die erste und dritte Reihe stellt Neuschnee dar, die zweite und vierte länger liegenden feuchten Schnee. In der ersten Spalte wurde σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet.

(h)

6.1.4 Testszene 4: Echtzeitdiffusion

Wie schon in Abschnitt 5.4.1 erwähnt, kann die Echtzeit-Diffusion nach Shah et al. [72] in der Implementierung nur mit Spot- und Richtungslichtquellen umgehen. In den bisherigen Szenen kamen jedoch nur Umgebungslicht oder Flächenlichtquellen vor. Zur Veranschaulichung wurde das Umgebungslicht in der Topfpflanzen-Szene durch ein Richtungslicht ersetzt, Abb. 28 zeigt das Ergebnis. Shah et al. [72] haben zusätzlich die notwendigen Erweiterungen für Umgebungslicht auf Basis der Kugelflächenfunktionen beschrieben. Diese wurden hier jedoch nicht implementiert. Zum Vergleich wurde ein Bild mittels Multipoldiffusion berechnet.

Die Diffusionstextur entspricht einer Look-Up-Tabelle. Alternativ zu ihrer Verwendung kann die diffuse Reflektanz Rd auch für jedes Fragment mit Gl. (4.18) (für Dipoldiffusion) ausgerechnet werden, dies wirkt sich jedoch schnell negativ auf die Bildrate aus. Die Spanne zwischen $R_d(0)$ und $R_d(r_{max})$ ist leider sehr groß, denn typische Schneeparameter führen zu einer recht schnellen Abfall des Diffusionsprofils (siehe Abb. 5). Die große Eindringtiefe ist dennoch nicht zu vernachlässigen: Eine asymptotische Annäherung an Null dauert ungleich länger als bei vielen anderen Materialien. Damit einher geht die kurze mittlere freie Weglänge in Schneedecken; durch die starke Vorwärtsstreuung und die geringe Absorption führen die vielen Streuvorgänge eher zu einer weiteren Verbreitung ins Innere als einer starken Abschwächung. Das führt dazu, dass für das Echtzeitmodell eine große Anzahl an Splats benötigt werden. Nach Shah et al. [72] lässt sich die Anzahl der an jedem Punkt notwendigen sich überlappenden Splats no mit der Ungleichung $R_d(0)/(n_0 \cdot R_d(r_{max})) < \varepsilon$. Durch Monte-Carlo-Integration lässt sich r_{max} , wie in in Abschnitt 4.2.5 dargestellt, numerisch ermitteln. Geht man von einer durchschnittlichen Entfernung $r_{max} = 0,4m$ aus, wächst n₀ bei Neuschnee und einem Fehler von $\varepsilon = 0.01$ auf 756.142.857 $(R_d(0) \approx 21.172 \text{ und } R_d(0,4) \approx 0,0029)$. Diese hohe Anzahl kann natürlich nicht erreicht werden. Zumal aufbauend auf der Anzahl der überlappenden Splats die tatsächliche Anzahl der notwendigen Splats $n \cdot n$ berechnet wird [72]: $n = \frac{1}{2}n_0W/r_{max}$. W stellt dabei die Breite des Frustums des Lichts dar. Damit ist n noch deutlich größer. In der Implementierung kann daher die Anzahl der Splats begrenzt werden. Aufbauend auf dem tatsächlichen Diffusionsprofil von Neuschnee wurde Abb. 28 realisiert.

Das Bild wurde mit $r_{max} = 0.4m$ für Neuschnee berechnet. Da aber die eben beschriebene sehr große Anzahl an Splats nicht realisiert werden kann, ist das Ergebnis ohne weiteres Zutun zu dunkel—schließlich gibt es auch weniger Beiträge an den einzelnen Fragmenten. Daher wurden die Ergebniswerte stärker gewichtet und mit einem Faktor von 3 multipliziert. Die Splats wurden auf 1024² begrenzt und das Rendern der Splats passierte in einem 400px × 400px Puffer. Schon dieses Bild benötigte circa 20 Sekunden zur Berechnung.



Abbildung 28: "Echtzeit"-Diffusion mittels Splatting, berechnet nach [72] mit 20s Berechnungszeit pro Bild.



Abbildung 29: Multipoldiffusion, berechnet nach [22].

6.1.5 Testszene 5: Einfachstreuung

Eingangs von Kapitel 4 wurde bereits dargestellt, dass Einfachstreuung (vor allem für Schnee) ein sehr lokales Verhalten zeigt. Auch macht der Einfluss auch die Gesamtabstrahlung nach Jensen [44] aufgrund der hohen Albedo einen sehr kleinen Anteil aus. Dies lässt sich auf visuell bestätigen. Die in Testszene 2 verwendete Topfpflanze wurde nach zwei verschiedenen Verfahren je ausschließlich mit Einfach- und ausschließlich mit Mehrfachstreuung berechnet.

Zuerst wurde die Einfachstreuung mit dem Modell von Hanrahan und Krueger [33] berechnet (siehe Abschnitt 4.1.1). Auf Basis von gleichbleibenden und gleichartigem einfallendem Licht kann das Flächenintegral über die Oberfläche integriert werden. Damit ist es möglich R_d auf Basis der Materialparameter zu bestimmen. In Abb. 30 ist in der linken Bildhälfte allein der Einfachstreuungsanteil dargestellt und rechts exklusiv die diffuse Reflektanz R_d als Vielfachstreukomponente. Die Mitte zeigt beide Anteile aufsummiert. Man sieht den deutlich geringeren Anteil der Einfachstreuung. Visuell ist sie dennoch nicht zu verachten. Sie trägt gewissermaßen zu den "Glanzlichtern" bei. Besonders helle Stellen wie die linken Seiten der Blätterschneedecken oder eher dunklere Regionen bekommen so mehr Geltung. Der Anteil der Einfachstreuung bewegt sich bei der verwendeten Szene im Durchschnitt bei 19,3% . Bei kleinen Einfallswinkeln des Lichtstrahls im Bezug auf die Normale steigt der Anteil auch auf bis zu 30% und fällt in Schattenregionen bis auf 5% . Diese Werte variieren natürlich mit Szene und Beleuchtung, zeigen aber, dass die Einfachstreuung in diesem Modell nicht vernachlässigt werden sollte. Der Anteil ist weitgehend unabhängig von der Wellenlänge des Lichts, lediglich der blaue Anteil ist immer am geringsten, gefolgt von Grün.

Der zweite Vergleich ist der zwischen Einfachstreuung und der durch Dipol-Diffusion berechneten Vielfachstreuung. Er wird in Abb. 31 gezeigt. Einfachstreuung ist dabei noch weniger vertreten, als beim ersten Beispiel: Im Durchschnitt bewegt sich dieser bei 4%, fällt in Schattenregionen unter 1% und steigt bei exponierten Stellen bis auf 12%. Optisch macht sich dieser Unterschied ebenfalls bemerkbar, die Einfachstreuung scheint noch weniger wichtig.



Abbildung 30: Links: exklusiv Einfachstreuung Rechts: allein Vielfachstreuung durch Integration des Flächenintegrals bei uniformer Beleuchtung Mitte: beides kombiniert.



Abbildung 31: Links: exklusiv Einfachstreuung Rechts: allein Vielfachstreuung durch Dipol-Diffusion Mitte: beides kombiniert.

6.2 **DISKUSSION**

Wie die Bilder deutlich machen, ist es möglich mittels der verwendeten Diffusionstechniken die Lichtausbreitung in Schnee realitätsnah darzustellen. Da Schnee jedoch ein Medium ist in dem es unzählige kleine Variationen der Struktur und Oberfläche gibt, gibt es einige zusätzliche Hürden bei der Modellierung und Beleuchtung. Der Detailgrad der Oberflächenstruktur, deren Körnigkeit, spielt eine große Rolle und nicht zuletzt deswegen ist die synthetische Bilderzeugung hier problemlos von wirklichen Bildern zu unterscheiden. Feine Strukturen werden gerade bei dünnen durchschienenen Schichten klar erkennbar. Die Modellierung mittels Geometrie stößt bei Detailaufnahmen schnell an ihre Grenzen, kann aber auch in weniger genauer Form die Glaubwürdigkeit unterstützen. Zumal die Vielfachstreuung Details verschwimmen lässt. Wie in Abschnitt 5.3.2 dargestellt, wurden Details hier hauptsächlich mit einer hoch aufgelösten Geometrie und Texturen für Streuungsparameter realisiert. Mit sehr genauer Modellierung lässt sich dies im benötigten Rahmen lässt sich der gewünschte Detailgrad meist mit einem genauen Gitternetz realisieren. Die Folge sind dabei aber eine große Menge an Oberflächenpunkten und damit häufig eine höhere Verarbeitungszeit. Insofern wäre ein Verfahren für die Detailerzeugung vorzuziehen, dass im Zuge der eigentlichen Bildberechnung arbeitet. Ein solches wurde hier aber nicht verwendet, ist aber vielversprechend zur Modellierung der Detailgeometrie.

Gegenüber dem Einfachstreuungsmodell sowie der Vielfachstreuung auf Basis einer BRDF (also einer Vorintegration über die Fläche) wird die Oberflächenbeschaffenheit durch ein BSSRDF-Modell merklich weichgezeichnet. Kleine Details der Oberfläche werden gehen so in die Umgebung über und somit schwerer bis gar nicht mehr wahrnehmbar. Dies ist auch in den Bildern 19 und 20 zu erkennen. Wirklicher Schnee kann sich je nach Typ ähnlich verhalten. Ist die Oberflächenstruktur jedoch wie in Abb. 32 stärker ausgeprägt, muss die Oberflächenstruktur für die Verwendung mit einer BSSRDF modelliert oder geniert werden. Ganz glatt wird eine Schneeoberfläche nie erscheinen und so kann die Überblendung der Oberflächendetails bei den benutzen Streuparametern schnell problematisch werden. Da sich die verwendeten Parameterberechnungen (geometrische Optik, Bohren-Barkstrom und SnowPack) auf den diffusen Innenteil einer Schneedecke beziehen bzw. sich die Parameter auch stark zwischen Oberfläche und Innerem ändern [12], ist dies aber nicht ohne weiteres lösbar. Eine Möglichkeit wäre es die Schneedecke als mehrschichtiges Modell zu beschreiben. Dies führt jedoch vor allem zu einer Verkleinerung des Streu- und damit des Schwächungskoeffizienten ($\sigma_t \ll \sigma_a$), da diese mit steigender Korngröße und fallender Dichte abnehmen. Dadurch steigt die mittlere freie Weglänge und umso wichtiger wird die Oberflächenstruktur.

Die Nacht-Testszenen die eine Fotografie zum Vergleich besitzen, machen im Original einen "wärmeren" Eindruck auf den Betrachter als ihr synthetisches Pendant. Zum Teil mag das daran liegen, dass die im Original verwendeten Spektren den Lichtquellen nicht bekannt sind, jedoch sollte dies nicht die Hauptursache sein. So wurde zur Beleuchtung des Schneelichts (Testszene 3, Abb. 26) eine realistische Beleuchtung gewählt. Damit liegt die Ursache hauptsächlich in der Parametrisierung der Vielfachstreuungsmethoden. Die verwendeten Parameter beschreiben die diffuse Lichtausbreitung *im Inneren* einer Schneeschicht, in dem von Bohren und Barkstrom [12] als "Diffusionsregion" bezeichneten Bereich. Parameter die eine Lichtausbreitung genauer in Oberflächennähe beschreiben, wurden nicht ermittelt. Somit bleibt es Gegenstand der Forschung ob veränderte Parameter den optischen Eindruck besser annähern können. Auch die zusätzliche Verwendung von Einfachstreuung vermochte den kühleren Eindruck nicht zu kompensieren.

Das Dipolmodell unterschätzt die diffuse Transmission (und überschätzt die diffuse Reflektanz), da es von einem halbunendlichen Medium ausgeht. Ein Effekt der vor allem bei kleinen von hinten beleuchteten Oberflächen bemerkbar macht. Wie schon im vorhergehenden Abschnitt 6.1.3 als Beispiel angebracht, lässt sich dies in den Bildern 27 (e) und (i) beobachten. Diese Situation tritt bei stark durchleuchteten Schnee häufig auf, stellt aber bei den meisten Tageslichtszenen kein Problem dar. Die Bestrahlungsstärke ist dort deutlich höher und die diffuse Strahlung dominanter. Leider wird die Unterschätzung nach kurzer Entfernung vom Austrittspunkt des Lichtes zu einer Überschätzung. Nach Diagrammen von Donner und Jensen [22] geschieht dies mit abnehmender optischen Dicke einer Schicht stärker. Das dauerhafte Unterschätzen der Transmission entsteht erst mit einer Dicke von etwa 10 freien Weglängen (je nach Parametern). Die mittlere freie Weglänge steigt mit abnehmendem Streukoeffzienten. Konfigurationen mit deutlich höherer Abstrahlung wie in Abb. 18 (k) (Dipol, $\sigma'_t \approx 36\frac{1}{m} \rightarrow l_d \approx 2,7$ cm) trifft genau dieses Problem. Der Abstand zwischen Schneeoberfläche und Lichtquellen ist jeweils etwa 12cm . Neuschnee gilt nach Abschnitt 3.2.2 nach circa 20cm als effektiv optisch dick, Altschnee erst ab circa 50cm . Da Licht explizit hindurch gelassen werden sollte, wurde eine geringere Tiefe gewählt.

Damit lässt sich festhalten, dass das Dipolmodell für die Transmission von Licht bei vor allem geringen Streukoeffzienten ungeeignet ist. Denn damit ist die mittlere freie Weglänge relativ hoch und die Dipoldiffusion *überschätzt* transmittiertes Licht bei dünnen schickten. Mit etwas dickeren Schichten wird die Transmission *unterschätzt*. Das Multipolmodell scheint aus dieser Sicht deutlich geeigneter zu sein.

Aber auch das Multipol lässt in Testszene 1 (Lichterkette) Probleme erkennen. Es zeichnet sich eine deutlicher Sprung bei des transmittierten Lichts bei größer werdender Entfernung von der Lichtquelle ab. Dieser ist als klare Grenze bei dem blauen und grünen Licht in Abb. 18 (b) und (e) zu erkennen. Die Entfernung vom Punkt direkt über der Lichtquelle bis zu einer solchen Grenze entspricht der Entfernung in der die Transmission nach Gl. (4.25) verschwindet. Mit einer feineren Auflösung der Look-Up-Tabelle für R_d kann dieser Effekt jedoch beseitigt werden. Wie bereits in Abschnitt 6.1.1 angedeutet, ist die Geometrie des durchstrahlten Objekts bei Verwendung des Multipolmodells deutlicher als im Dipolmodell abgezeichnet. Dies resultiert aus dem Eingang der Oberflächennormale in Gl. (4.26). Für hoch aufgelöste Objekte ist dies weniger ein Problem und die Wirkung ist eher positiv aus dem Gesamteindruck. So zeichnen sich dadurch mehr Oberflächendetails wie in Abb. 27 (f) ab. Niedriger aufgelöste Geometrie ist, wie in Abb. 21 (b), jedoch deutlich zu erkennen. Damit wird der glättende Effekt der Vielfachstreuung auf diesem Weg etwas geschmälert. Die Grenzen der für Schnee in diesem Sinne notwendigen Geometrie sind klar durch die durchschnittliche Korngröße gesetzt. Um diese Darzustellen bedarf es jedoch eines Oberflächennetzes das Strukturen deutlich kleiner als ein Millimeter (Tabelle 1) berücksichtigt. Eine explizite Beschreibung führt hier sehr schnell zu sehr großen Netzen. Daher wäre es wünschenswert das Oberflächennetz adaptiv mittels Displacement-Karten zu verfeinern.

Um Schnee mitteln Multipol-Diffusionsapproximation gut darstellen zu können, sollte die Auflösung also hoch genug sein, damit die Änderungen der Oberflächennormalen nicht sehr stark sind. Auch sollte die Loouk-Up-Tabelle fein aufgelöst sein um Sprünge der Abstrahlung durch Transmission zu vermeiden. Ein Wert pro Zehntel Millimeter schien dem in den Experimenten auszureichen.

Die ursprüngliche Multipoldiffusion geht von einer festen Schichtdicke aus. Testszene 3 (Schneelicht) machte aber deutlich, dass eine dynamische Berechnung oder eine Einteilung in unterschiedliche Dickeklassen positiv beitragen könnte. Gerade dünnere Stellen in Richtung Lichtquelle (ausgehend vom Betrachter) könnte so mehr Licht durchdringen.

In Testszene 2 (Topfpflanze) war ein deutlicher Helligkeitsunterschied zwischen der Berechnung mittels BSSRDF (Multipolmodell von Donner und Jensen [22]) und mittels BRDF (Einfachstreuung von Hanrahan und Krueger [33] und Vielfachstreuungs-BRDF von Jensen [45] sowie die Wiscombe-Warren-BRDF) zu sehen. Wie dort bereits angedeutet, liegt das an der geringeren Abstrahlung bei Verwendung des BRDF-Modells bzw. der größeren des BSSRDF-Modells. Dies hat sich auch in Abschnitt 6.1.5 über die Einfachstreuung gezeigt. Das Einfachstreuungsmodell hat per se eine geringere Abstrahlung und zählt nur als eine Art notwendiger Zusatz. Da die Wisombe-Warren-BRDF eine ähnliche Abstrahlung wie die zur BRDF vorintegrierte BSSRDF hat, ist die Frage eher warum die BSSRDF-Modelle eine deutlich höhere Abstrahlung haben. Dieser Unterschied hängt auch vom Modell ab und es zeigt sich, dass der Einfluss von an anderen Stellen ins Medium eingedrungene Licht sehr groß ist. Die Abstrahlung konvexer Flächen, wie sie bei der Topfpflanze vorkommen, ist deutlich größer; mehr Bestrahlungsstärkenstichproben liegen in der Einflussregion. Wie sich durch numerische Integration herausgestellt hat, sind Oberflächenpunkte von über 50cm relevant für die Abstrahlung an einem Punkt. Dieser Einfluss macht sich in den verwendeten BSSRDF-Modellen durch eine höhere Abstrahlung bemerkbar.



Abbildung 32: Große Eiskristalle auf der Schneeoberfläche.

Die Benutzung einer Beschleunigungsdatenstruktur für de Bestrahlungsstärke macht die Berechnung deutlich schneller, aber schafft gleichzeitig einen sehr großen Bedarf an Speicher und Zeit für den Aufbau. Für die Lichterketten-Szene aus Abschnitt 6.1.1 wurden bei Benutzung der Streuungskoeffizienten auf Basis der geometrischen Optik und Neuschnee 21.182.674 Stichproben der Bestrahlungsstärke auf der Oberfläche benötigt. Letztlich wird erst damit der Einsatz von Dipol- und vor allem Multipolmodell praktikabel. Die Berechnungen dauern andernfalls sehr lang. Mit den genutzten Berechnungsarten der Streuparameter kann die Vielfachstreuung von Licht in Schneeflächen beschrieben werden. Die Berechnungen entsprechen dabei gemachten Beobachtungen wie eine größere Eindringtiefe von Licht mit steigendem Alter der Schneedecke und damit höherer Korngröße. Lediglich die Modelle scheinen mit den vielen Unebenheiten und komplexeren Strukturen von Schneeflächen nicht immer umgehen zu können. Ihr Ausgangspunkt sind planparallele Oberflächen und so wird vor allem bei konvexen Objekten die Transmittanz unterschätzt.

Auch hat sich gezeigt, dass das Echtzeitverfahren von Shah et al. [72] für die Visualisierung von Schnee nicht geeignet scheint. Die geringe aber wichtige Absorption und die starke Vorwärtssteuung führen zu einer hohen Eindringtiefe der Strahlung. Entsprechend groß ist der Einflussbereich von Photonen, die diffuse Reflektanz ist bei Schnee in einem Umkreis r_{max} von circa 50cm für einen Oberflächenpunkt von Bedeutung. Das führt dazu, dass sehr viele Splats benötigt werden um die Reflektanz mit einem kleinen Fehler ($\varepsilon < 0,01$) nachzubilden. Die theoretisch benötigte Anzahl kann aber nicht ohne weiteres erreicht werden. Einzelne Beiträge werden mittels additivem Alphamischen (engl. additive alpha blending) akkumuliert, leider aber durch zu wenige Beiträge.

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Um die Vielfachstreuung von Strahlung, im Speziellen Licht, in Schneeoberflächen zu betrachten, war es der erste Schritt die optischen Eigenschaften von Schnee darzustellen. Dies geschah in Kapitel 3. Verschiedene Größen beeinflussen die Interaktion mit Strahlung und so wurde eine Übersicht zur Korngröße und Dichte sowie darauf aufbauend zur Physik der Streuereignsisse und Berechnungsmöglichkeiten gegeben. Dabei wurde im Speziellen auf Beschreibungen von Bohren und Barkstrom [12] sowie Wiscombe und Warren [84] zurückgegriffen. Damit war es möglich plausible Streuungsparameter für Schnee zu ermitteln. Es wurde darüber hinaus dargestellt, dass das Streumuster mit der in der Computergrafik häufig verwendeten HENYEY-GREENSTEIN-Phasenfunktion berechnet werden kann.

Im Bereich der Fernerkundung werden häufig spektrale BRDFs gemessen und nach analytischen Modellen dafür gesucht. Da die von einem Flugzeug oder einem Satellit gemessene Strahlung sich in den meisten Fällen über nur wenige Wellenlängen und nur einer Blickrichtung erstreckt, ist das in diesem Feld unentbehrlich. Dozier [39] merkt weiterhin an, dass die gefundenen BRDFs als Randbedingungen für die Berechnung eines Strahlungstransportmodells genutzt werden können. Dies gilt natürlich einerseits für den Weg der remittierten Strahlung zum Sensor, beispielsweise durch die Atmosphäre hindurch, aber eben auch für den Weg des Lichts durch die Schneedecke selbst. Darauf aufbauend ließen sich dedizierte BSSRDFs für Schnee errechnen. Konkret könnte man, wie in Abschnitt 5.3.3 beschrieben, mit einer BRDF die FRESNEL-Terme in der BSSRDF ersetzen. Mit der bereits in Mitsuba verfügbaren Mikrofacetten-BSDF von Walter et al. [83] konnten so Glanzpunkte und etwas deutlichere Oberflächenstrukturen erzeugt werden.

Die Reflektanz von Schnee ist im sichtbaren Bereich des Spektrums nicht sehr empfindlich gegenüber Veränderungen des Einstrahlwinkels des Lichts. Weder Azimut- noch Polarwinkel können die Albedo mehr als wenige Prozent verändern. Etwas mehr Einfluss besitzt die Korngröße und somit dar Anisotropiefaktor g. Aber auch da ist im sichtbaren Bereich nicht mit großen Veränderungen der Reflektanz zu rechnen. Vor allem aber Verunreinigungen und Einschlüsse beeinflussen die Reflektanz im sichtbaren Bereich [39]. Keines der hier benutzten Modelle kann diese beschreiben. Frisvad et al. [29] erweiterten jedoch die LORENZ-MIE-Theorie um die Möglichkeit, Absorption zu berücksichtigen. Darauf aufbauend wurden von ihnen auch unterschiedliche Arten von Eis untersucht. Einschlüsse von Salz und Algen konnten verschiedenes Eis sehr realistisch darstellen, allerdings auf Basis von einer Monte-Carlo Photon-Tracing-Simulation. Konkrete Parameterangaben waren der Veröffentlichung nicht zu entnehmen und es wurde begonnen diese auf diesem Wege zu ermitteln. Bis zur Fertigstellung der Arbeit konnte aber keine gültige Parameterkonfiguration ermittelt werden. Ein Vergleich der Werte wäre sehr interessant, vor allem im Bezug auf die hier dargestellten Verfahren.

Optische Parameter von Schnee, wie der Anisotropiefaktor der Phasenfunktion und die Einfach-Streu-Albedo, legten die Vermutung nahe, dass die Streuung nicht direkt reflektierten Lichts durch Vielfachstreuung dominiert wird. In Kapitel 4 wurde dies bestätigt. Die Ausstrahlung M durch gestreutes Licht in Schneeoberflächen wird zum allergrößten Teil (\approx 95%) durch Vielfachstreuung verursacht. Daher sind Modelle die diesen Effekt berücksichtigen unabdingbar für eine realistische Simulation der Interaktion von Licht und Schnee.

Um alternativ Werte zu erhalten die sich besser mit denen von Jensen et al. vergleichen lassen, wäre es gut, eine Messung nach dem von ihnen vorgeschlagene Messaufbau zur Materialparameterbestimmung [45] für verschiedene Schneearten durchzuführen. Das Diffusionsprofil wird durch Fotos eines in eine Schneeoberfläche eindringenden, stark gebündelten Lichtstrahls beschrieben. Das Licht wird senkrecht zur Fläche eingestrahlt, ein bzw. drei (für die drei Grundfarben) Laser wären dafür geeignet. Die so erhaltenen unkomprimierten Bilder werden mit dem von Debevec und Malik vorgestellten Algorithmus [20] in einem High Dynamic Range (HDR) Bild kombiniert und als Reflektanz-Tabelle interpretiert. Gleichzeitig wäre ein praktischer Test zur Anwendbarkeit der Diffusionstheorie auf Schneeoberflächen möglich: Eine Beleuchtung aus verschiedenen Winkeln würde einen Lambertstrahler nachbilden. Anschließend kann eine die so gewonnenen (diskrete) Reflektanzfunktion relativ zu einem weißen idealen Diffusor betrachtet werden. Durch ein Fitting an Gl. (4.18) können dann die Absorptions- und Streuungsparameter ermittelt werden [45].

Bei konstanter Einstrahlung kann eine BSSRDF über die Oberfläche vorintegriert werden, die Bestrahlungsstärke ändert sich schließlich nicht. Das gilt aber nur unter der Annahme, dass die Oberfläche ein planparalleles halbunendliches Medium darstellt. Es kann dann die totale diffuse Reflektanz R_d ermittelt werden. Darauf aufbauend wäre es interessant ob mit einer zusätzlichen Simulation einer rauen Oberfläche durch die Verwendung einer BRDF statt FRESNEL-Termen eine Schneeoberflächen für viele Außenszenen ausreichend beschrieben werden kann. Dazu würden sich dedizierte Schnee-BRDF-Modelle, wie Wiscombe und Warren [84] oder Kokhanovsky und Zege [48], anbieten.

Das Strahlungsmuster von Schnee wird zumeist mit der LORENZ-MIE-Theorie erklärt. Diese nimmt an, dass es sich um kugelförmige Teilchen handelt und daher wird meist mit einer Kugel gearbeitet die dasselbe Verhältnis von Volumen zu Fläche wie das Eisteilchen besitzt. Auf diese Art kann aber ein zunehmend genauer untersuchtes Phänomen einer starken Rückwärtsstreuung bei Wellenlängen von 400–500nm erklärt werden [39]. Aktuelleren Ergebnissen wie des Messungen von Kaasalainen et al. [47] zu Folge wäre auch ein Einfluss auf die hier genutzten Modelle denkbar. Insofern wäre eine ausführlichere Betrachtung darauf aufbauender Modelle interessant.

Für die Berechnung des Strahlungsstransports in Schneedecken im Bezug auf die Fernerkundung, wurde häufig eine Variante des Zweistrommodells genutzt. Die Auflösung in eine lokal räumliche Ausbreitung war nicht relevant. In Abschnitt ?? wurde erwähnt, dass ein Siebenstrommodell das kleinste Multistrommodell ist, mit dem ein dreidimensionaler Strahlungstransport beschrieben werden kann. Inwieweit dieses Modell für die Computergrafik nutzbar ist, wäre interessant zu recherchieren. Eine diesbezügliche Untersuchen ist bisher nicht bekannt.

Die Multipolapproximation erzeugte sehr gute Ergebnisse und ist für viele Szenen mit Licht durchschienenem Schnee gut einzusetzen. In Abschnitt 6.2 wurde behauptet, dass dabei eine konstante Schichtdicke der diffusen Transmission für so unterschiedliche und komplexe Formen, wie sie Schnee bilden kann, ungeeignet ist. Um die Transmittanz-Dipole nach Gl. (4.25) richtig auf der Oberfläche ausrichten zu können (dort soll schließlich die Randbedingung erfüllt sein), muss die Schichtdicke entsprechend angepasst werden. Zumindest kann diese abhängig vom beschriebenen Objekt gemittelt werden. Eine explizite Auswertung für jede Bestrahlungsstärke-Stichprobe ist aber sehr aufwändig, obgleich die Entfernung nicht mehr aufwändig zu berechnen ist sofern der Bestrahlungsstärken-Octree genutzt wird.. So könnten Look-Up-Tabellen für eine Reihe verschiedener Entfernungen erstellt werden. In der Auswertung müsste anschließend nur die richtige Tabelle gewählt werden. Diesbezüglich wurden in dieser Arbeit keine Experimente gemacht, jedoch ist vorstellbar damit weitere positive Effekte erzielen zu können.

Es existieren weitere Techniken um die Vielfachstreuung in einem Medium zu bestimmen als in dieser Arbeit betrachtet oder angeschnitten wurden. So wäre eine genauere Betrachtung des anisotropen Dipolmodells von Jakob et al. [42] sehr interessant gewesen. Die entsprechenden Versuche konnten jedoch leider nicht zu einem schlüssigen Ergebnis geführt werden. Das Modell selbst setzt eigentlich eine homogene Struktur der Streukörper und somit eine homogene Anisotropie im Medium voraus. Da die Eisteilchen in Schnee aber zufällig ausgerichtet sind, wäre es vermutlich eher ungeeignet für Schnee. Unabhängig davon gibt es auch für andere (verwendete) Modelle theoretische Beschränkungen die Schnee nicht immer ganz erfüllen kann und letztlich kann nur ein Versuch die Tauglichkeit zeigen.

Ein weiterer Ansatz der auf der Dipol- und Multipoldiffusion aufbaut, ist ihre Kombination mit einem Quadpolmodell zur sogenannten *Photon Diffusion* von Donner und Jensen [23]. Vor allem komplexe Oberflächen erfahren damit eine akkurater Darstellung. Photonen haben in Schnee eine hohe Eindringtiefe. Mit dem Photon-Diffusion-Verfahren soll auch dies besser beschrieben werden. Auch die KUBELKA-MUNK-Theorie bietet einen guten Ausgangspunkt für Vielfachstreuungsuntersuchungen. Sie ist eine weitere Zweistrom-Theorie und vor allem im Zelloptik-Bereich der Medizin werden einfachere Modelle wie dieses gerne genutzt [78]. Auch hier werden zwei Strahlungsrichtungen—nach oben und unten—definiert. In der Farbtheorie und der Malerei ist diese Beschreibungsform ebenfalls häufig verwendet. Für das Volumenrendering im Gebiet der Visualisierung wurde sie durch Abdul-Rahman und Chen [1] verwendet. Mit Hilfe von Raymarching wird dort jedes Volumenelement betrachtet. Auch opakere Medien wie das Innere einer Orange konnte so gut dargestellt werden.

Auf Basis von Volumengittern arbeitet auch ein Vielfachstreuungsmodell von Sharp und Machiraju [73]. Die Verwendung der Diffusionstheorie in einem Gittermodell ermöglicht eine einfachere Lösung der Strahlungstransportgleichung. Zusätzlich kann ihre Darstellung durch eine sogenannte CHOLESKY-Faktorisierung beschleunigt werden. Der Energietransport zwischen einzelnen Zellen wird durch die Interpretation als elektrischen Stromkreis der Zellenübergänge simuliert. Jede Zelle ist zu den angrenzenden über einen ohmschen Widerstand verbunden. Ihr Wert repräsentiert die Wahrscheinlichkeit dass in Strom zwischen beiden Knotenpunkten fließt [73]. Am Ende muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden von dem Teile vorberechnet werden können und die Berechnung beschleunigt wird.

Kokhanovsky und Zege nähern den Strahlungstransport in Schnee mittels einer asymptotischer Folge an [48]. Die so entstehende BRDF könnte untersucht und mit dem Wiscombe-Warren-Modell verglichen werden. Möglicherweise könnten beide Modelle nach der Oberfläche differenziert werden um Modelle zu erhalten, sodass eingehende Strahlung nicht als uniform betrachtet wird.

Das in Abschnitt 4.2.5 beschriebene Verfahren der beschleunigten Photonenausbreitung beschleunigt das herkömmliche Monte-Carlo Photon Tracing. Es ist zu erwarten, dass es eine gute Kontrollmöglichkeit für andere Annäherungen bietet da es einen Kompromiss zwischen reinem Photon Tracing und einer gröberen Annäherung ist.

Ein von Shah et al. [72] entwickelte Echtzeitdiffusionsmethode auf der Basis von Splatting konnte für Schnee nicht praktikabel eingesetzt werden. Für realitätsnahe Reflektanzwerte wären deutlich mehr Splats notwendig gewesen. Die Berechnung durch dieses Verfahren brauchten bis zu einer halben Minute zur Fertigstellung eines Bildes—ohne die tatsächlich notwendige Splatanzahl. Im Moment wird die Anzahl der Splats allein durch Kamerabilder aus Sicht des Lichts bestimmt. Alle Oberflächenpunkte, die Licht erreicht, werden (auch bei Umgebungslicht) Zentrum eines Splats. Möglicherweise könnten Berechnungen beschleunigt werden bzw. ließe sich die notwendige Anzahl auch reduzieren wenn über mehrere Rendervorgänge hinweg Splats behalten oder zusammengefasst werden. Die meiste Zeit verbringt der Algorithmus mit dem Zeichnen der Splats und somit könnte vor allem ein Zusammenfassen lohnen. Es gibt damit eine Vielzahl von Möglichkeiten zur Berechnung von Vielfachstreuung. Es wurden bei weitem nicht alle in dieser Arbeit betrachtet, es wurde sich auf die in der Computergrafik anscheinend verbreitetsten Methoden konzentriert. Parameterberechnungen aus dem Bereich der Klimatologie und Geophysik wurden für das Dipol- [45] und Multipoldiffusionsmodell [22] angewendet. Der Einfluss der Einfachstreuung wurde auf Basis des Hanrahan-Krueger-Modells ermittelt und als förderlich für die Realitätsnähe befunden. Dennoch ist der Einfluss mit etwa 5% bei Verwendung des Multipolmodells auch nicht sehr groß. Zwingend erforderlich ist sie also nicht.

Die Testszenen sollen vor allem die Transmission in Schneeflächen zeigen. Dies lies sich mit nicht-natürlichen Lichtquellen am einfachster realisieren, da der Wirkungsbereich bestimmt werden kann. Die entsprechenden Bilder bieten außerdem einen guten Vergleichspunkt. Es zeigte sich, dass die verwendeten Modelle grundsätzlich für die Visualisierung von Schnee nutzbar sind. Die errechneten Parameter scheinen die verschiedenen Schneetypen beschreiben zu können, denn zumindest spiegelt sich das erwartete Verhalten von z. B. weniger Streuung bei älterem Schnee wieder. Die dadurch erhöhten Eindringtiefen waren auch in der Natur zu beobachten. Mit dem Modell von Bohren und Barkstrom wurden dabei die besten Erfahrungen gemacht.

Von den getesteten Modellen schien die Vielfachstreuung durch das Multipolmodell am besten dargestellt. Sowohl bei den Nachtszenen wie auch am Tag. Schön wäre jedoch wenn die Oberflächenstruktur deutlicher in Erscheinung treten könnte. Mit einer expliziten Modellierung konnte nur bedingt der gewünschte Detailgrad erzeugt werden. Nicht zuletzt wirkt der weichzeichnende Effekt der Vielfachstreuung erschwerend. Mit einer Variation der Streuparameter durch eine Textur kann ebenfalls eine Oberflächenstruktur simuliert werden. Es konnte jedoch leider keine Textur gefunden werden, die an allen Stellen der Objekte die Oberfläche gut repräsentierte. Ausschnittsweise konnte so dennoch der Realitätsgrad erhöht werden.

Es lässt sich festhalten, dass die Vielfachstreuung in Schneeoberflächen durch die verwendeten Verfahren dargestellt werden kann. Diese Komponente gilt es auch unbedingt für eine realistische Schneedarstellung zu beachten. Die Ergebnisse lassen jedoch auch erkennen, dass zu einem komplett realistischen Modell noch mehr gehört als die verwendeten Diffusionsapproximationen. Eine feine Oberflächenstruktur ist nur schwer zu erkennen und ist auch nicht nur mit eine lokalen Parameterveränderung zu ersetzen. Trotz dem großen Anteil der Vielfachstreuung, spielt die Oberflächenstruktur aber eine große Rolle für eine photorealistische Visualisierung von Schneeoberflächen. Finden dahingehend bessere als die hier verwendeten Techniken Anwendung, können mit den errechneten Parametern und den verwendeten Modellen plausible Bilder erzeugt werden.
ABBILDUNGSVERZEICHNIS

Abbildung 1	Raumwinkel einer Kugel. Bei einem Einheitskreis entspricht der volle Raumwinkel der Oberfläche: 4π .
Abbildung 2 Abbildung 3	Einfachstreuung, nach [45] 9 Streuungsverhalten von Licht in (a) einer BRDF und (b) einer BSSRDF, nach [45] 16
Abbildung 4	Absorptionskoeffizient $\sigma_{a,Eis}$ von reinem Eis und Schnee mit $\rho = 430 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (berechnet nach Glei- chung (2.2)) = 27
Abbildung 5	Das Diffusionsprofil für 470nm von Schnee mit den Eigenschaften der Beispiele zuvor und σ_t berech- net nach Gl. (3.5). Die anderen Wellenlängen ver- laufen bis auf minimale Abweichungen genauso.
Abbildung 6	Das Diffusionsprofil aus Abb. 5 gewichtet nach dem Radius r. 31
Abbildung 7	Phasenfunktion aus [6] im Vergleich mit der Henyey- Greenstein-Phasenfunktion (beide mit $q = 0.5$) 33
Abbildung 8	Realer und komplexer Brechungsindex von Eis bei -7 °C und Wasser bei 23 °C. Daten aus [87], [25] und [57]. 34
Abbildung 9	Die Albedos von Schnee und anderen Oberflächen- arten. 35
Abbildung 10	Albedo a_d von Schnee mit der Korngröße 0.3 mm, einer Dichte von 430 kg · m ⁻³ und den Absorpti- onskoeffizienten aus Abbildung 4. Nach [10] 36
Abbildung 11	Die Diffusionsannäherung 47
Abbildung 12	Die (isotrope) Dipolannäherung zur Diffusionstheo- rie, nach [45] 51
Abbildung 13	Ein zweidimensionale Höhenspannenkarten nach [80]. Es gibt verschiedene Übergänge: Objekt–Luft (Quadrat) und Objekt–Schnee (Kreis) 62
Abbildung 14	Die Oberfläche der auf Mitsuba [41] basierenden Ergebnisanwendung. 73
Abbildung 15	Einstellmöglichkeiten der verschiedenen Verfahren (Rendering-Reiter in Anwendung). 74
Abbildung 16 Abbildung 17	Eine mit Schnee bedeckte Lichterkette, von [34] 79 Synthese einer von Schnee bedeckten Lichterkette, visualisiert mittels Dipol-Diffusion. 79

- Abbildung 18 Verschiedene Schneeparameter für Testszene 1 im Vergleich. Obere zwei Reihen: Multipol, Untere zwei Reihen: Dipol. Je die obere Reihe stellt Neuschnee dar, die untere länger liegenden feuchten Schnee. Erste Spalte: σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet. 80
- Abbildung 19 Eine Topfpflanze mit Schnee, berechnet mit Multipoldiffusion und Einfachstreuung. 83
- Abbildung 20 Eine Topfpflanze mit Schnee, berechnet mit dem Hanrahan-Krueger-Modell für Einfachstreuung und mit Jensens BSSRDF-Annäherung durch eine BRDF.
- Abbildung 21 Ausschnitte mit Blick auf Boden, berechnet (a) mit Dipoldiffusion und Einfachstreuung und (b) durch Multipoldiffusion ohne Einfachstreuung. In letzterem Bild ist das Oberflächennetz deutlich zu erkennen. 84
- Abbildung 22 Verschiedene Schneeparameter für Testszene 2 im Vergleich. Obere zwei Reihen: Multipol, Untere zwei Reihen: Dipol. Je die obere Reihe stellt Neuschnee dar, die untere länger liegenden feuchten Schnee. Erste Spalte: σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet. 85
- Abbildung 23 Eine Topfpflanze mit Neuschnee, berechnet mit Dipoldiffusion und einem Mikrofacettenmodell. 86
- Abbildung 24 Mögliche Artefakte bei der Verwendung die Dipolmodells, hier bei Altschnee und Bohren-Barksrtom-Streumodell. 88
- Abbildung 25 Ein Schneelicht, von [46] 89
- Abbildung 26 Ein Schneelicht, berechnet mittels Multipol-Diffusion (siehe Text) und Streuparametern nach Gl. (3.5) für bereits länger liegenden Schnee. 89
- Verschiedene Schneeparameter für Testszene 3 im Abbildung 27 Vergleich. Die oberen beiden Reihen wurden mittels Multipol-, die unteren beiden mittels Dipol-Diffusion berechnet. Die erste und dritte Reihe stellt Neuschnee dar, die zweite und vierte länger liegenden feuchten Schnee. In der ersten Spalte wurde σ_t nach Gl. (1.4), in der zweiten nach Gl. (3.5) und in der dritten nach Gl. (3.7) berechnet. 90 Abbildung 28 "Echtzeit"-Diffusion mittels Splatting, berechnet nach [72] mit 20s Berechnungszeit pro Bild. 92 Abbildung 29 Multipoldiffusion, berechnet nach [22]. 92

83

Abbildung 30	Links: exklusiv Einfachstreuung Rechts: allein Viel				
	fachstreuung durch Integration des Flächenintegra				
	bei uniformer Beleuchtung Mitte: beides kombi-				
	niert. 94				
Abbildung 31	Links: exklusiv Einfachstreuung Rechts: allein Viel-				
	fachstreuung durch Dipol-Diffusion Mitte: beides				
	kombiniert. 94				
Abbildung	Croße Fickristelle auf der Schneesberfläche				

Abbildung 32 Große Eiskristalle auf der Schneeoberfläche. 98

TABELLENVERZEICHNIS

Tabelle 1 Tabelle 2	Korngrößen verschiedener Schneetypen, nach [87] 25 Dichte ρ verschiedener Schneetypen, nach [28] und
	[86] 25
Tabelle 3	Absorptionskoeffizienten σ_a in $\frac{1}{m}$ für Schnee mit einer Dichte von 430 kg · m ⁻³ sowie für reines Eis 27
Tabelle 4	Die verschiedenen Berechnungsarten des Schwä-
	chungskoeffizienten von Schnee mit $\rho = 430 \text{kg} \cdot$
	m ⁻³ und einer Eiskorngröße von 0.3mm. Der Ani-
	sotropiefaktor beträgt $g = 0.85$ und die Einfachstreu-
	Albedo $\Lambda \approx 0.99998$ 30
Tabelle 5	Die Mindesttiefe W _{es} verschiedener Schneetypen
	um als effektiv halbunendlich gelten zu können,
	nach [84] und Beispiele. 32
Tabelle 6	Die Legendre-Entwicklungskoeffizienten für die Pha-
	senfunktion von Schnee, nach [6]. 33
Tabelle 7	Schwächungskoeffizienten für Beispiel aus Tabelle
	4 sowie darauf aufbauend Streuungskoeffizient σ_s
	und reduzierter Streuungskoeffizient σ'_s mit g =
	0.874. Jeweils in $\frac{1}{mm}$. 37
Tabelle 8	Die verschiedenen für die Testszenen verwende-
	ten Koeffizienten um Neuschnee und bereits län-
	ger liegender Schnee darzustellen. 76
Tabelle 9	Vergleich verschiedener Berechnungen für die 1.
,	Testszene (Lichterkette) in einer Auflösung von je
	1024 × 1024. 78
Tabelle 10	Vergleich verschiedener Berechnungen für die 2.
	Testszene (Topfpflanze) in einer Auflösung von je
	$1024 \times 1024.$ 82
Tabelle 11	Vergleich verschiedener Berechnungen für die 3.
	Testszene (Schneelicht) in einer Auflösung von je
	1024 × 1024. 88

LISTINGS

Listing 1	ISO 14	977 EBNF für hspan-Dateiformate 72	
Listing 2	Look-l	Up-Table der Umkehrfunktion von Gleicht	Gleichung
	5.1	73	

ERKLÄRUNGEN ZUM URHEBERRECHT

Die Verwendung des Ausgangsbildes für Szene 1 (Lichterkette) wurde freundlicherweise durch Chris Hendricks [34] im Rahmen dieser Arbeit gestattet. Für die Nutzung des Originalbildes für Testszene 3 (Schneelicht) in dieser Arbeit wurde die Zustimmung von Chris Järnåker [46] eingeholt.

DANKSAGUNG

Dank gilt vielen Personen die mich während dieser Diplomarbeit unterstützt haben, die Verständnis zeigten, mir helfend zur Seite standen und Kraft spendeten. Vor allem Antje Gruner brachte mir viel Geduld entgegen, hatte ein offenes Ohr und brachte einige Korrekturen ein. Norbert Klawikowski konnte mir in Gesprächen zu einigen Problemen den richtigen Denkansatz liefern und half bei den Korrekturen. Ohne die Arbeit und Zeit von Wenzel Jakob existierte wohl kein Mitsuba, die Ausgangsbasis für die Programmierung im Rahmen dieser Arbeit. Auch bekam ich von ihm stets eine hilfreiche Antwort auf Fragen zu Programmdetails und Algorithmen. Hildegard Gruner war mir eine sehr große Hilfe für die Korrektur und war mir mit Edgar Gruner, wie mir es auch meine Eltern Kathrin und Arnd Kazimiers waren, eine wichtige Unterstützung um diese Arbeit voranzubringen. Für weitere Korrekturen und Anmerkungen danke ich Franz Kazimiers und Adolfo Muñoz.

- Alfie Abdul-Rahman and Min Chen. Spectral volume rendering based on the kubelka-munk theory. In *Eurographics 2005*, volume 24, 2005.
- [2] Tomas Akenine-Möller, Eric Haines, and Natty Hoffman. *Real-Time Rendering 3rd Edition*. A. K. Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 2008. ISBN 987-1-56881-424-7.
- [3] Elibet Ambrocio. A self-consistent obstacle scattering theory for the diffusion approximation of the radiative transport equation. Technical report, University of California, Merced, 2008.
- [4] T. Markvart Augustin McEvoy, Tom Markvart and L. Castaner. Practical Handbook of Photovoltaics: Fundamentals and Applications. Elsevier Science, 2003. ISBN 978-1856173902.
- [5] Bruce. R. Barkstrom. Some effects of multiple scattering on the distribution of solar radiation in snow and ice. *Journal of Glaciology*, 11(63), 1972.
- [6] Bruce R. Barkstrom and Charels W. Querfeld. Concerning the effect of anisotropic scattering and finite depth on the distribution of solar radiation in snow. *Journal of Glaciology*, 14(70):107–124, 1975.
- [7] Colin Barré-Brisbois and Marc Bouchard. Approximating translucency for a fast, cheap and convincing subsurface scattering look. Game Developers Conference 2011, 2011.
- [8] James F. Blinn. A generalization of algebraic surface drawing. ACM Trans. Graph., 1(3):235–256, 1982. ISSN 0730-0301. doi: http://doi. acm.org/10.1145/357306.357310.
- [9] James F. Blinn. Light reflection functions for simulation of clouds and dusty surfaces. *Computer Graphics*, 16(3):21–29, 1982.
- [10] Craig F. Bohren. Colors of snow, frozen waterfalls, and icebergs. J. Opt. Soc. Am., 73(12):1646–1652, Dec 1983.
- [11] Craig F. Bohren. Multiple scattering of light and some of its observable consequences. *American Journal of Physics*, 55(6):524–533, 1987.
- [12] Craig F. Bohren and Bruce R. Barkstrom. Theory of the optical properties of snow. *Journal of Geophysical Research*, 79(30):4527–4535, 1974.
- [13] Craig F. Bohren and R. L. Beschta. Snowpack albedo and snow density. *Cold Regions Science Technology*, 1:47–50, 1979.

- [14] Craig F. Bohren and Eugene E. Clothiaux. Fundamentals of Atmospheric Radiation. Wiley-VCH, 2006.
- [15] Michael A. Box, Phil Attard, Gary Bryant, and Bruce H. J. McKellar. Sum rules for mie scattering. J. Opt. Soc. Am. A, 4(5):795–799, May 1987.
- [16] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer*. Oxford University Press, 1950.
- [17] B. J. Choudhury and Alfred T. C. Chang. Two-stream theory of reflectance of snow. *IEEE Transactions on Geoscience Electronics*, 17 (3):63–68, 1979.
- [18] Cameron L. Chrisman. Rendering realistic snow. Technical report, University of California, 2005.
- [19] A. W. Christie. The luminous directional reflectance of snow. pages 621–622, 1953.
- [20] Paul Debevec and Jitendra Malik. Recovering high dynamic range radiance maps from photographs. pages 369–378, 1997.
- [21] E. D'Eon and D. Luebke. Advanced techniques for realistic realtime skin rendering. In Nguyen, editor, *GPU Gems, vol.* 3, pages 293–348. Addison Wesley, 2008.
- [22] Craig Donner and Henrik Wann Jensen. Light diffusion in multilayered translucent materials. ACM Trans. Graph., 24:1032–1039, July 2005. ISSN 0730-0301.
- [23] Craig Donner and Henrik Wann Jensen. Rendering translucent materials using photon diffusion. 2007.
- [24] R. V. Dunkle and J. T. Bevans. An approximate analysis of the solar reflectance and transmittance of a snow cover. *Journal Meterological*, (13):212–216, 1956.
- [25] Palik Edward D. Handbook of Optical Constants of Solids II. Ed. Academic Press, Inc., 1991.
- [26] Christoph Eisenmann. Einfluss des faraday-effekts auf die kohärente rückstreuung im fall von rayleigh-streuern. Master's thesis, Universität Koblenz, 2002.
- [27] Roger G. Barry et al. Snow. In *Global Outlook for Ice and Snow*, chapter 4, pages 39–62. 2007.
- [28] Paul Fearing. *The Computer Modelling of Fallen Snow*. PhD thesis, UBC, 2000.
- [29] Jeppe Revall Frisvad, Niels Jørgen Christensen, and Henrik Wann Jensen. Computing the scattering properties of participating media using lorenz-mie theory. In ACM SIGGRAPH 2007 papers, SIG-GRAPH '07. ACM, 2007.

- [30] Barbara Früh. Entwicklung und Evaluierung einer Modellhierarchie zur Simulation der aktinischen Strahlung in aerosolbelasteter und bewolkter Atmosphäre. PhD thesis, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2000.
- [31] J. C. Giddings and E. LaChapelle. Diffusion theory applied to radiant energy distribution and albedo of snow. *Journal of Geophysical Research*, 66:181–189, Jan 1961.
- [32] T. C. Grenfell and D. K. Perovich. Radiation absorption coefficients of polycrystaline ice from 400 nm to 1400 nm. *Journal of Geophysical Research*, (86):7447–7450, 1981.
- [33] Pat Hanrahan and Wolfgang Krueger. Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering. 1993.
- [34] Chris Hendricks. Follow the christmas colors, Juni 2011. URL http://www.flickr.com/photos/hendricksfamily/ 2170120023/.
- [35] Christophe Hery. Implementing a skin bssrdf: (or several...). In *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, SIGGRAPH '05. ACM, 2005.
- [36] Sébastien Hillaire. Deformable translucent objects, Juni 2011. URL http://sebastien.hillaire.free.fr.
- [37] Yi Ru Huiying Xu and Yinlong Sun. From physics to illumination models of subsurface scattering. Technical report, Dapartment of Computer Science, Purdue University, West Lafayette, 2006.
- [38] Akira Ishimaru. *Wave propagation and scattering in random media*. Academic Press, New York, 1978.
- [39] A. T. C. Chang J. Dozier, R. E. Davis and K. Brown. The spectral bidirectional reflectance of snow. In *Spectral Signatures of Objects in Remote Sensing: Proceedings of the conference*, pages 87–92. European Space Agency, 1988.
- [40] John David Jackson. *Klassische Elekktrodynamik*. Berlin New York de Gruyter, 2006.
- [41] Wenzel Jakob. Mitsuba renderer, Juni 2010. URL http://www. mitsuba-renderer.org.
- [42] Wenzel Jakob, Adam Arbree, Jonathan T. Moon, Kavita Bala, and Steve Marschner. A radiative transfer framework for rendering materials with anisotropic structure. ACM Trans. Graph., 29:53:1– 53:13, July 2010. ISSN 0730-0301.
- [43] Henrik Wann Jensen. Global illumination using photon maps. pages 21–30. Springer-Verlag, 1996.

- [44] Henrik Wann Jensen and Juan Buhler. A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials. ACM Trans. Graph., 21: 576–581, July 2002.
- [45] Henrik Wann Jensen, Stephen R. Marschner, Marc Levoy, and Pat Hanrahan. A practical model for subsurface light transport. In SIGGRAPH '01: Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pages 511–518, New York, NY, USA, 2001. ACM. ISBN 1-58113-374-X.
- [46] Chris Järnåker. How-to build a snow candle, Juni 2011. URL http: //www.grynx.com/how-to-build-a-snow-candle/.
- [47] S. Kaasalainen, M. Kaasalainen, T. Mielonen, J. Suomalainen, J. I. Peltoniemi, and J. Näränen. Optical properties of snow in backscatter. *Journal of Glaciology*, 52:574–584, 2006.
- [48] Alexander A. Kokhanovsky and Eleonora P. Zege. Scattering optics of snow. *Appl. Opt.*, 43(7):1589–1602, Mar 2004.
- [49] Kalle Koutajoki. Bssrdf (bidirectional surface scattering distribution function). Technical report, Helsinky University of Technology, 2002.
- [50] Richard Lee and Carol O'Sullivan. Accelerated light propagation through participating media. pages 17–23, 2007.
- [51] G. H. Liljequist. Energy exchange of an antarctic snow-field, shortwave radiation. Norwegian-British-Swedish Antacrtic Expedition, 1949-52, Scientific Results, 2, 1956.
- [52] Fei Liu. An illumination model for realistic rendering of snow surfaces. Master's thesis, Universität Uppsala, 2010.
- [53] Douglas Barber Matthew Peterson and Sarah Green. Monte carlo modeling and measurements of actinic flux levels in summit, greenland snowpack. *Atmospheric Environment*, (36):2545–2551, 2002.
- [54] Ingo Meirold-Mautner. *A physical snow-radiation model: Measurements, model development and applications to the ecosystem snow.* PhD thesis, University of Innsbruck, Mar 2004.
- [55] Gerhard Meister. Messung der spektralen reflexionsfunktion (brdf) ausgewählter oberflächen bei natürlicher beleuchtung. Master's thesis, Universität Hamburg, 1995.
- [56] Tom Mertens, Jan Kautz, Philippe Bekaert, Hans-Peter Seidelz, and Frank Van Reeth. Interactive rendering of translucent deformable objects. In *Proceedings of the 14th Eurographics workshop on Rendering*, EGRW '03, pages 130–140. Eurographics Association, 2003. ISBN 3-905673-03-7.

- [57] Mark L. Mesenbrink. Complex Indices of Refraction for Water and Ice from Visible to Long Wavelengths. PhD thesis, Air Force Inst. of Technology Wright-Patterson, 1996.
- [58] W. E. Knowles Middleton and A. G. Mungall. The luminous directional reflectance of snow. *J. Opt. Soc. Am.*, 42(8):572–579, 1952.
- [59] Lars Möller. Akzeptanz von solaranlagen. Technical report, TH Karlsruhe, 1999.
- [60] F. E. Nicodemus, J. C. Richmond, J. J. Hsia, I. W. Ginsberg, and T. Limperis. Geometrical considerations and nomenclature for reflectance. pages 94–145, 1992.
- [61] Tomoyuki Nishita, Hiroshi Iwasaki, Yoshinori Dobashi, and Eihachiro Nakamae. A modeling and rendering method for snow by using metaballs. *Computer Graphics Forum*, 16(3):C357–C364, 1997.
- [62] H. M. Nussenzveig and W. J. Wiscombe. Efficiency factors in mie scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 45(18):1490–1494, 1980.
- [63] Sean O'Neil. Accurate atmospheric scattering. In *GPU Gems 2*, chapter 16. 2004.
- [64] Koichi Onoue and Tomoyuki Nishita. An interactive deformation system for granular material. *Computer Graphics Forum*, 24(1):51–60, 2005.
- [65] Donald K. Perovich and John W. Govoni. Absorption coefficients of ice from 250 to 400 nm. 18(7):1233–1235, 1991.
- [66] Matt Pharr and Pat Hanrahan. Geometry caching for ray-tracing displacement maps. In *In Eurographics Rendering Workshop*, pages 31–40. Springer, 1996.
- [67] Matt Pharr and Greg Humphreys. *Physically Based Rendering: From Theory to Implementation*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2004. ISBN 012553180X.
- [68] Preetham. A practical analytic model for daylight. Technical report, University of Utah, 1999.
- [69] James F. O'Brian Robert W. Summer and Jessica K. Hodgins. Animating sand, mud, and snow. *Computen Graphics Forum*, 18(1), 1999.
- [70] Gilberto Rosado. Rendering snow cover. In Wolfgang Engel, editor, Shader X⁴ – Advanced Rendering Techniques, pages 453–455. Charles River Media, Inc., 2004.
- [71] Dipl. Phys. Christoph Schmitz. Spektroskopische und strukturelle Untersuchungen gewebeähnlicher Substanzen mit der gepulsten photothermischen Radiometrie. PhD thesis, Universität Hannover, 1998.

- [72] Musawir A. Shah, Jaakko Konttinen, and Sumanta Pattanaik. Image-space subsurface scattering for interactive rendering of deformable translucent objects. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 29:66–78, 2009. ISSN 0272-1716.
- [73] Richard Sharp and Raghu Machiraju. Accelerating subsurface scattering using cholesky factorization. *The Visual Computer*, 22:541– 549, 2006.
- [74] Brian Smits, Peter Shirley, and Michael M. Stark. Direct ray tracing of smoothed and displacement mapped triangles. Technical report, University of Utah, 2000.
- [75] Tiago Sousa. Vegetation procedural animation and shading in crysis. In Nguyen, editor, *GPU Gems*, vol. 3, pages 373–385. Addison Wesley, 2008.
- [76] W. A. Stein et al. Sage Mathematics Software (Version 3.3). he Sage Development Team, 2011. http://www.sagemath.org.
- [77] C. W. Thomas. On the transfer of visible radiation through sea ice and snow. *Journal of Glaciology*, 4:481–484, February 1963.
- [78] Valery Tuchin. *Tissue Optics Light Scattering Methods for Instruments fer Medical Diagnosis.* SPIE Press, 2007.
- [79] Niels v. Festenberg. *Diffuse Oberflächenerzeugung zur realistischen Beschneiung virtueller Welten*. PhD thesis, TU Dresden, 2010.
- [80] Niels v. Festenberg and Stefan Gumhold. A geometric algorithm for snow distribution of snow in virtual scenes. *Eurographics Workshop on Natural Phenomena*, 2009.
- [81] H. C. van de Hulst. High-order scattering in diffuse reflection from semi-infinite atmosphere. *Astron. Astrophys.*, 9:374–379, 1970.
- [82] H. C. van de Hulst. Multiple Light Scattering Tables, Formulas, and Applications; Volume 2. Academic Press, 1980.
- [83] Bruce Walter, Stephen R. Marschner, Hongsong Li, and Kenneth E. Torrance. Microfacet models for refraction through rough surfaces. pages 195–206, 2007.
- [84] Stephen G. Warren. Optical properties of snow. pages 67–89, 1982.
- [85] Lee Westover. Interactive volume rendering. In *Proceedings of the* 1989 Chapel Hill workshop on Volume visualization, VVS '89, pages 9– 16. ACM, 1989.
- [86] Wikipedia. Wikipedia (de): Schnee. Website, March 2011. URL http://de.wikipedia.org/wiki/Schnee.
- [87] Warren J. Wiscombe and Stephen G. Warren. A model for the spectral albedo of snow. i: Pure snow. pages 2734–2745, 1980.

[88] Georg Zotti, Alexander Wilkie, and Werner Purgathofer. A critical review of the preetham skylight model. In Vaclav Skala, editor, *WSCG ' 2007 Short Communications Proceedings I*, pages 23–30. University of West Bohemia, January 2007.